Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT †
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR † A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

72. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 11. JANUAR 1960)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1960

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechtes der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3 — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

72. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Karlin, S., and G. Szegö, On certain differential-integral equations 205

Geiringer, H., On a limit theorem leading to a compound Poisson distribution . . 229

Hölder, E., Extremale geschlossene Differentialformen. Unterschallströmungen im Großen 235

Walfisz, A., Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden 259

Schmeidler, W., Die Navier-Stokesschen Gleichungen der Hydrodynamik als System quadratischer Integralgleichungen 279

Bergman, S., The number of intersection points of two analytic surfaces in the space of two complex variables 294

Erhard Schmidt †

Am 6. Dezember 1959 ist Erhard Schmidt im Alter von 83 Jahren in Berlin gestorben. Viele Mathematiker gedenken in Verehrung des weitblickenden Forschers und warmherzigen Lehrers, dem sie bedeutende Anregungen und unvergeßliche Begegnungen mit der Schönheit der Mathematik verdanken. Mit hoher menschlicher Würde verkörperte Schmidt die Haltung, die er in seiner Berliner Rektoratsrede 1929 als die Quelle der mathematischen Grundlagenforschung bezeichnet hat: Unbeirrbarer Wahrheitsdrang, der nach Gewißheit vor dem eigenen Bewußtsein ringt, Selbstbeschränkung in der Breite der Fragestellung, Mut in der Weite der Zielsetzung und kühne Selbständigkeit in der Abstreifung der Fesseln des Geläufigen.

Die Mathematische Zeitschrift hat nach Lichtenstein, Schur und Knopp nun den letzten der vier Gründer verloren, die sich 1918 unter Lichtensteins tatkräftiger Führung zusammenfanden. Schmidt hat die Zeitschrift durch ständige Mitwirkung in der Redaktion und durch eigene, zum Teil außergewöhnlich umfangreiche Beiträge gefördert. Sein Vermächtnis wird in hohen Ehren gehalten werden.

Die Schriftleitung

KARLIN, S., and G. SZEGÖ
Math. Zeitschr. 72, 205—228 (1960)

On certain differential-integral equations

To the memory of LEON LICHTENSTEIN

By

S. KARLIN and G. SZEGÖ

§ 1. Introduction. Problems and Results[1])

1. The study of certain models of stochastic processes [*1*, *6*] leads to the problem of finding all solutions of the linear differential-integral equation

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(D+\lambda_k)\right] f(x) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_0^\infty f(x+t)\, dH(t), \quad x \geqq 0, \tag{1.1}$$

which tend to a finite limit as $x \to +\infty$. Here H is a distribution function on the positive real axis with a positive finite second moment and the parameters λ_k are assumed (at first) to be positive but otherwise arbitrary; $D = d/dx$. All solutions $f(x)$ dealt with are naturally supposed to be n-fold differentiable.

Equation (1.1) is of the Wiener-Hopf convolution type since it is valid only for positive x. Consequently, with more stringent restrictions imposed on H this equation can be studied by employing relatively deep methods of complex analysis. Such an approach was carried out in [*1*]. In the present paper we offer a direct and elementary approach which yields more complete results. For possible applications the reader is referred to [*1*].

As examples we point out the following special cases of (1.1):

$$f'(x) + f(x) = \int_0^\infty f(x+t)\, dH(t), \quad x \geqq 0, \tag{1.2}$$

and

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(D+\lambda_k)\right] f(x) = \sum_{p=1}^{m} \gamma_p f(x+t_p), \quad x \geqq 0, \tag{1.3}$$

where $t_p > 0$, $\gamma_p > 0$, $\sum_{p=1}^{m} \gamma_p = 1$.

2. Let us illustrate the general idea of the method to be used by proving that $f(x) = \text{const.}$ is the only solution of (1.2) for which $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty)$ exists and $f(+\infty) = f(0)$. (Below we prove more.) We may assume that $f(+\infty) = f(0) = 0$. If $f(x)$ is not a constant, it attains either a positive maximum or a negative minimum (or both). Let $\max f(x) = f(\xi) = M > 0$, $\xi > 0$. We then have $f'(\xi) = 0$ and from (1.2)

$$M = \int_0^\infty f(\xi+t)\, dH(t) \leqq M \int_0^\infty dH(t) = M$$

[1]) This research was supported by the Office of Naval Research and by the National Science Foundation. — Numbers in square brackets refer to the Bibliography at the end of the paper.

follows. This implies $f(\xi+t)=M$ for all points $t>0$ where $H(t)$ possesses a positive measure; such t must exist in view of the assumption that the second moment of $H(t)$ is positive. Choosing some $t=t_0>0$, and repeating the previous argument, we conclude that

$$f(\xi+2t_0)=M, \ldots, f(\xi+nt_0)=M,$$

when n is an arbitrary positive integer; for $n\to\infty$ this contradicts to $f(+\infty)=0$. In some cases more complicated "mean values" appear on the right-hand side and the method requires certain modifications.

3. Dealing with linear differential equations of constant coefficients it is natural to seek exponential solutions where the coefficient in the exponent is determined to satisfy an appropriate algebraic equation. We try the same procedure in the present problem. By direct verification we see that $f(x)=e^{-\alpha x}$ is a solution of (1.1) having a finite limit at $x\to+\infty$, if and only if $\Re(\alpha)>0$ and

$$W(\alpha)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda_k}\right)-\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dH(t)=0. \tag{1.4}$$

An additional solution is furnished by $\alpha=0$ leading to $f(x)=\text{const}$. The usual convention applies to multiple roots: if α is a root of (1.4) of multiplicity r, $\Re(\alpha)>0$, then $e^{-\alpha x}$, $xe^{-\alpha x}$, ..., $x^{r-1}e^{-\alpha x}$ represent independent solutions, all having the limit 0 as $x\to+\infty$. (If $\alpha=0$ is a double root, the solution x must, of course, be rejected.)

We shall see in Section 2 that there exist precisely n or $n-1$ (counting multiplicities) exponential solutions with $\Re(\alpha)>0$ according as

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}<\int_0^\infty t\,dH(t) \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\geqq\int_0^\infty t\,dH(t), \tag{1.5}$$

respectively. The principal result of this paper is the following uniqueness theorem.

THEOREM A. *The only solution of* (1.1) *which tends to a finite limit as* $x\to+\infty$, *is a linear combination of exponential solutions* $\{e^{-\alpha x}\}$, *where* $\Re(\alpha)>0$, *and of a constant. In particular, if the first inequality in* (1.5) *holds, there exists an n-dimensional linear manifold of exponential solutions; if the second inequality holds, there exists an* $(n-1)$*-dimensional linear manifold of such solutions.*

4. Before embarking on the proof of Theorem A we must discuss the roots of the transcendental equation $W(\alpha)=0$. This is accomplished in the following Section 2. Certain mean values and some preliminary remarks concerning their behavior at $x\to+\infty$ are dealt with in Section 3. The proof of Theorem A is completed in Section 4.

In Section 5 we consider the differential-integral equation (1.1) under more general conditions concerning λ_k. In Section 6 we deal with the equation

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(D+\lambda_k)\right]f(x)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\,dH(t), \tag{1.6}$$

here x runs from $-\infty$ to $+\infty$. Here λ_k is real, $\lambda_k \neq 0$. The only solutions aving finite limits, as $x \to +\infty$ and $x \to -\infty$, are in this case $f(x) = \text{const.}$

Sections 7—9 are devoted to a general treatment of our problem under the oint of view of the concept of *semi-groups*. This general background might lead o other remarkable applications of our elementary method. Several illu- rations are offered discussing in particular the partial differential equation f the heat transfer and a partial differential equation involving Laplace's perator.

§ 2. Preliminaries: On zeros

In this section we study the number and location of the zeros of the unction $W(\alpha)$ defined by (1.4) in the right half of the complex plane, $\Re(\alpha) > 0$. Ve assume that all λ_k are positive.

1. We set

$$U(\alpha) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_k}\right), \qquad V(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dH(t), \tag{2.1}$$

o that $W(\alpha) = U(\alpha) - V(\alpha)$. This function is regular for $\Re(\alpha) > 0$ and con- inuous for $\Re(\alpha) \geqq 0$. For $\alpha = iu$, u real and non-zero, $W(\alpha)$ is different from ero. In fact,

$$|U(\alpha)| = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{u^2}{\lambda_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} > 1 \geqq |V(\alpha)|. \tag{2.2}$$

Let $\varrho = 3 \max(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Since $\varrho \geqq 3\lambda_k$, $\lambda_k^{-1}\varrho - 1 > 1$, we have for α lying n the semicircle of radius ϱ about the origin and in $\Re(\alpha) \geqq 0$,

$$|U(\alpha)| \geqq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\varrho}{\lambda_k} - 1\right) > 1 \geqq |V(\alpha)|.$$

Thus the only non-vanishing zeros of $W(\alpha)$ in $\Re(\alpha) \geqq 0$ lie in the interior f the domain S bounded by the semicircle mentioned and by the corresponding egment of the imaginary axis.

2. We now prove the following

LEMMA 1. *The function $W(\alpha)$ possesses exactly n zeros in the region $\Re(\alpha) > 0$ nd a simple zero at $\alpha = 0$ if*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} < \int_0^\infty t\, dH(t).$$

The function $W(\alpha)$ possesses exactly $n-1$ zeros in $\Re(\alpha) > 0$ and a simple ero at $\alpha = 0$ if

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} > \int_0^\infty t\, dH(t).$$

The function $W(\alpha)$ has exactly $n-1$ zeros in $\Re(\alpha) > 0$ and a double zero t $\alpha = 0$ if

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} = \int_0^\infty t\, dH(t).$$

In all these cases multiple zeros are counted with the right multiplicity. Of course, $W(\alpha)$ is in general not analytic at $\alpha=0$. We say that $W(\alpha)$ has a simple zero at $\alpha=0$ if $W(0)=0$, $\lim_{\alpha\to 0+} W'(\alpha)\neq 0$, and a double zero at $\alpha=0$ if $W(0)=\lim_{\alpha\to 0+} W'(\alpha)=0$, $\lim_{\alpha\to 0+} W''(\alpha)\neq 0$. It may also be pointed out that the complex zeros of $W(\alpha)$ are conjugate in pairs.

For the proof of the Lemma we observe first that

$$(2.3)\quad \begin{cases} U(\alpha)=1-\alpha\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}+\alpha^2\sum_{k<l}\lambda_k^{-1}\lambda_l^{-1}-\cdots=1-s_1\alpha+\frac{s_2}{2}\alpha^2-\cdots, \\ V(\alpha)=1-\alpha\int_0^\infty t\,dH(t)+\frac{\alpha^2}{2}\int_0^\infty t^2\,dH(t)+o(\alpha^2) \\ \qquad =1-h_1\alpha+\frac{h_2}{2}\alpha^2+o(\alpha^2), \quad \alpha\to 0+. \end{cases}$$

As to the second equation we note that

$$\left|\alpha^{-2}\left(e^{-\alpha}-1+\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)\right|\leqq A$$

uniformly in the right half plane $\Re(\alpha)\geqq 0$. Now, let ε be given and $\int_\omega^\infty t^2\,dH(t)<\varepsilon$; we have

$$\alpha^{-2}\left(V(\alpha)-1+h_1\alpha-\frac{h_2}{2}\alpha^2\right)=\left(\int_0^\omega+\int_\omega^\infty\right)\alpha^{-2}t^{-2}\left(e^{-\alpha t}-1+\alpha t-\frac{\alpha^2t^2}{2}\right)t^2\,dH(t).$$

The modulus of the second integral is less than $A\varepsilon$; the modulus of the first integral is less than $B|\alpha|$ where $B=B(\omega)$ is independent of α. This yields the assertion.

We add that in the first and second case of the lemma $\alpha=0$ is a simple zero. In the third case we have, by SCHWARZ's inequality,

$$s_2<s_2+\sum_{k=1}^{u}\lambda_k^{-2}=s_1^2=h_1^2\leqq h_2$$

so that $U(\alpha)-V(\alpha)$ vanishes exactly of the second order.

3. Let δ be a positive number. We denote by S_δ the domain arising from S by indentation into $\Re(\alpha)>0$ by a semicircle of radius δ about the origin. We apply the principle of the argument to the function

$$W(\alpha)=U(\alpha)-V(\alpha)=U(\alpha)\left(1-\frac{V(\alpha)}{U(\alpha)}\right)$$

in the domain S_δ. The total change of the argument of $U(\alpha)$ when the boundary of S_δ is described in the positive direction is $=2\pi n$. It remains to discuss the second factor which we denote by w. On the large semicircle and on the imaginary axis ($\alpha\neq 0$) we have $|U(\alpha)|>|V(\alpha)|$ so that the vector w will be restricted to a circle of radius less than 1 about 1 and consequently

$$-\pi/2<\arg w<\pi/2.$$

On the small semicircle of radius δ we have, if $s_1 \neq h_1$,

$$w = 1 - \frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} = 1 - \frac{1 - h_1\alpha + \frac{h_2}{2}\alpha^2}{1 - s_1\alpha + \frac{s_2}{2}\alpha^2} + o(\alpha^2) = \alpha\left(h_1 - s_1 + o(1)\right).$$

In the third case, $s_1 = h_1$, we have

$$w = \alpha^2\left(\tfrac{1}{2}(s_2 - h_2) + o(1)\right).$$

Here and in the sequel, $o(1)$ tends to zero as $\delta \to 0$.

In the first case $h_1 - s_1$ is positive. At $\alpha = i\delta$ we have $\arg w = \pi/2 + o(1)$; at $\alpha = -i\delta$ we have $w = -\pi/2 + o(1)$ (see the remark about $\arg w$ above). Thus, describing the major arc of the boundary of S_δ from $-i\delta$ to $+i\delta$, the change of arg w will be $\pi + o(1)$. Now, describing the minor semicircle in the negative direction, the first factor α contributes a change of $-\pi$ to the argument while the second factor does not produce any significant change. Thus the total change of $\arg w$ is $o(1)$, i.e., $= 0$, and that of $\arg W(\alpha)$ is $2\pi n$.

In the second case $h_1 - s_1$ is negative. The change of $\arg w$ along the major arc is now $-\pi + o(1)$. Along the minor semicircle the same holds as before so that the total change of $\arg w$ is $-2\pi + o(1)$, i.e., -2π. Hence the change of $\arg W(\alpha)$ is $2\pi(n-1)$.

In the third case we note that $s_2 - h_2 < 0$ so that $\arg w = o(1)$ at $\alpha = \pm i\delta$. Hence the change along the major arc is also $o(1)$; along the minor arc it is determined essentially by α^2, i.e., $= -2\pi$, so that the result is the same as in the second case.

This completes the proof of Lemma 1.

§ 3. Preliminaries: On Transforms

In this section we define certain mean values useful in the discussion of the solutions of the differential-integral equation (1.1) which is in the center of our attention.

1. *We assume first that the constants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are all positive.* Let $\varphi(x)$ be a continuous function defined for $x \geqq 0$. We introduce the "transform"

$$\left\{\begin{aligned} K\varphi &= K\{\varphi(x)\} \\ &= e^{-\lambda_n x} \iint \ldots \int \exp\{(\lambda_n - \lambda_{n-1})\, u_{n-1} + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})\, u_{n-2} + \\ &\quad + \cdots + (\lambda_2 - \lambda_1)\, u_1 + \lambda_1 u_0\} \cdot \varphi(u_0)\, du_0\, du_1 \ldots du_{n-1}, \end{aligned}\right. \tag{3.1}$$

where the domain of integration is:

$$0 \leqq u_0 \leqq u_1 \leqq \cdots \leqq u_{n-1} \leqq x. \tag{3.2}$$

(We may carry out this integration by integrating first with respect to u_0 from 0 to u_1, then integrate the resulting function with respect to u_1 from 0 to u_2, etc.; finally we integrate with respect to u_{n-1} from 0 to x.) The

transform (3.1) establishes a correspondence between $\varphi(x)$ and $K\{\varphi(x)\}$. Clearly $y\ K\{\varphi(x)\}$ is a particular solution of the differential equation

$$[(D+\lambda_1)(D+\lambda_2)\dots(D+\lambda_n)]\cdot Ky=\varphi(x), \tag{3.3}$$

uniquely determined by the conditions

$$(D^\nu K\{\varphi(x)\})_{x=0}=0, \qquad 0\leqq\nu\leqq n-1. \tag{3.4}$$

Thus if $f(x)$ is *any* solution of (3.3) we have

$$f(x)=K\{\varphi(x)\}+A_1e^{-\lambda_1x}+A_2e^{-\lambda_2x}+\dots+A_ne^{-\lambda_nx}, \tag{3.5}$$

where $A_1, A_2, \dots, A_n$ are proper constants depending on $f(x)$. The necessary modification is obvious if some λ_k are equal. Actually, by this remark our differential-integral equation (1.1) can be transformed into an integral equation (3.5) in which $K\{\varphi(x)\}$ stands for the K-transform of

$$\varphi(x)=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty f(x+t)\,dH(t).$$

We note that $\varphi(x)>0$ involves $K\{\varphi(x)\}>0$.

Let us consider the special case $\varphi(x)=1$. Step-by-step application of the trivial inequality $\int_0^{u_1}e^{\lambda_1u_0}\,du_0<\lambda_1^{-1}\,e^{\lambda_1u_1}$ leads to

$$0<K\{1\}<(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n)^{-1}, \tag{3.6}$$

valid for all $x>0$. [The constant on the right is a particular solution of (3.3), $\varphi(x)=1$.] We also have, if $0<\eta<\min(\lambda_k)$,

$$0<K\{e^{-\eta x}\}<\{(-\eta+\lambda_1)\dots(-\eta+\lambda_n)\}^{-1}e^{-\eta x}. \tag{3.7}$$

With the aid of (3.6) we conclude the following important inequalities concerning an arbitrary bounded and continuous $\varphi(x)$:

$$m<\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\cdot K\{\varphi(x)\}<M, \tag{3.8}$$

where $m\leqq\varphi(x)\leqq M$, *provided that* $m<0$ *and* $M>0$. In particular, if $|\varphi(x)|\leqq M$, $M>0$, we have

$$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\cdot|K\{\varphi(x)\}|<M. \tag{3.8'}$$

Finally we observe that for $\varphi(x)=x^re^{px}$, $p>0$, r integral, $r\geqq0$, we have $K\{\varphi(x)\}\sim x^re^{px}$ as $x\to+\infty$. This follows easily from the definition (3.1) for $r=0$ and by integrating by parts for $r>0$.

2. The following lemma which yields further information regarding the derivatives of the transform $K\{\varphi(x)\}$, is remarkable in itself but it will not be used in the sequel.

LEMMA 2. *Let* $\varphi(x)$ *be continuous and* $\varphi(x)\to0$ *as* $x\to+\infty$. *Then all derivatives* $\Phi^{(\nu)}(x)$ *of the transform* $K\{\varphi(x)\}=\Phi(x)$ *defined by* (3.1) *tend to zero as* $x\to+\infty$ *where* $0\leqq\nu\leqq n$.

We set

$$(D+\lambda_n)\,\Phi(x)=g(x)$$
$$=e^{-\lambda_{n-1}x}\iint\cdots\int\exp\{(\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2})\,u_{n-2}+\cdots+\lambda_1 u_0\}\cdot\varphi(u_0)\,du_0\ldots du_{n-2},$$

where the range of integration is $0\leqq u_0\leqq u_1\leqq\cdots\leqq u_{n-2}\leqq x$.

We prove the assertion by mathematical induction showing that $g(x)\to 0$ implies $\Phi(x)\to 0$, hence also $\Phi'(x)\to 0$ as $x\to+\infty$. Let $\varepsilon>0$ be given and $|g(u)|<\varepsilon$ for $u\geqq\omega$. We have, $x>\omega$,

$$\Phi(x)=e^{-\lambda_n x}\int_0^x e^{\lambda_n u}\,g(u)\,du=e^{-\lambda_n x}\left(\int_0^\omega+\int_\omega^x\right)e^{\lambda_n u}\,g(u)\,du.$$

The first term on the right yields $e^{-\lambda_n x}O(1)$ while the second term is less than $\varepsilon e^{-\lambda_n x}\int_0^x e^{\lambda_n u}\,du$.

From Lemma 2 we conclude the following

COROLLARY. *Let $f(x)$ be any solution of (1.1) for which $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$ exists. Then all derivatives $f^{(\nu)}(x)$ tend to zero as $x\to+\infty$ where $1\leqq\nu\leqq n$.*

Indeed, we can assume that $f(+\infty)=0$ so that

$$\varphi(x)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\int_0^\infty f(x+t)\,dH(t)\to 0.$$

Use (3.5) and Lemma 2.

3. *We assume now that all λ_k are negative.*

Let $\varphi(x)$ be bounded and continuous for all real x [2]). The "transform" adapted to the present case can be defined as follows:

$$(3.9)\quad\begin{cases}L\varphi=L\{\varphi(x)\}\\ \quad=(-1)^n e^{-\lambda_n x}\iint\cdots\int\exp\{(\lambda_n-\lambda_{n-1})\,u_{n-1}+(\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2})\,u_{n-2}+\\ \quad+\cdots+(\lambda_2-\lambda_1)\,u_1+\lambda_1 u_0\}\cdot\varphi(u_0)\,du_0\,du_1\ldots du_{n-1}\end{cases}$$

where the domain of integration is now

$$(3.10)\qquad x\leqq u_{n-1}\leqq u_{n-2}\leqq\cdots\leqq u_1\leqq u_0<+\infty.$$

(Again we integrate, first with respect to u_0, from u_1 to $+\infty$, then with respect to u_1, from u_2 to $+\infty$, etc., finally with respect to u_{n-1} from x to $+\infty$.) The expression (3.9) is meaningful since the integral with respect to u_0 is majorized by $\int_{u_1}^\infty e^{\lambda_1 u_0}\,du_0=-\lambda_1^{-1}e^{\lambda_1 u_1}$, etc. The differential equation (3.3) holds again and also (3.5) (with $L\{\varphi(x)\}$ instead of $K\{\varphi(x)\}$); however, (3.4) does not hold in general. Also (1.1) is again equivalent to the integral equation (3.5) where $L\{\varphi(x)\}$ stands for the L-transform of

$$\varphi(x)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\int_0^\infty f(x+t)\,dH(t).$$

We note that $\varphi(x)>0$ involves $(-1)^n L\{\varphi(x)\}>0$.

[2]) In some applications we assume that $x\geqq 0$ throughout.

Let $\varphi(x)=1$. We obtain

$$L\{1\}=(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{-1}. \tag{3.11}$$

This formula is a limiting case of the following one:

$$L\{e^{-\eta x}\}=\{(-\eta+\lambda_1)\ldots(-\eta+\lambda_n)\}^{-1}e^{-\eta x},\quad \eta>0. \tag{3.12}$$

Finally the analog of (3.8) holds:

$$m<\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\cdot L\{\varphi(x)\}<M \tag{3.13}$$

where $m\leqq\varphi(x)\leqq M$, unless $\varphi(x)=\text{const}$. There is no restriction on the sign of m and M in the present case. (Clearly, for m and M we may take the lower and upper bound of $\varphi(x)$ in $[x,+\infty]$.)

4. The following important lemma is partly an analog of Lemma 2.

LEMMA 3. *Let $\varphi(x)$ be continuous for all real x and $\varphi(x)\to 0$ as $x\to+\infty$. Then $L\{\varphi(x)\}\to 0$ as $x\to+\infty$.*

Also, if $\varphi(x)\to 0$ as $x\to-\infty$, we have $L\{\varphi(x)\}\to 0$ as $x\to-\infty$.

In view of (3.11) the following more general assertion holds: If $\varphi(x)\to c$ as $x\to+\infty$ or $x\to-\infty$ we have:

$$L\{\varphi(x)\}\to c\,L\{1\}=c(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{-1}. \tag{3.14}$$

We note that $x\to+\infty$ is singled out in the definition of L so that the proofs of the two assertions contained in the lemma will be somewhat different. Actually the first assertion is an obvious consequence of (3.13). So we turn to the second one assuming that $\varphi(x)\to 0$ as $x\to-\infty$.

We again use mathematical induction. Let $L\{\varphi(x)\}=L_n(x)$ and let us denote by $L_{n-1}(x)$ the analogous transform of $\varphi(x)$ with parameters λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$. Since

$$(D+\lambda_n)L_n(x)=L_{n-1}(x),\qquad L_0(x)=\varphi(x),$$

we have

$$L_n(x)=e^{-\lambda_n x}\int_{+\infty}^{x}e^{\lambda_n u}L_{n-1}(u)\,du.$$

Now the argument is essentially the same as in 2. Let $|L_{n-1}(u)|<\varepsilon$, $u<-\omega$; also let $x<-\omega$. Then

$$L_n(x)=e^{-\lambda_n x}\left(\int_{+\infty}^{-\omega}+\int_{-\omega}^{x}\right)e^{\lambda_n u}L_{n-1}(u)\,du=e^{-\lambda_n x}O(1)+\varepsilon e^{-\lambda_n x}\int_{x}^{\infty}e^{\lambda_n u}\,du.$$

This yields the assertion.

COROLLARY. *Let $\varphi(x)\to c$ as $x\to+\infty$.* Then

$$DL\{\varphi(x)\}\to 0\quad as\quad x\to+\infty.$$

The same holds for the limiting process $x\to-\infty$.

Indeed, $DL_n=L_{n-1}(x)-\lambda_n L_n(x)$ so that

$$DL_n\to c(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1})^{-1}-\lambda_n c(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{-1}=0.$$

§ 4. Proof of Theorem A

We follow the notation of § 2 and assume, for the sake of simplicity, at the zeros of $W(\alpha)$ in $\Re(\alpha)>0$ are all distinct. The proof is carried out considering two cases.

1. *Case 1.* $s_1<h_1$. Here, we have available an n-dimensional manifold exponential solutions spanned by the solutions $e^{-\alpha_k x}$, $k=1, 2, \ldots, n$, where $(\alpha_k)=0$, $\Re(\alpha_k)>0$.

Suppose $f(x)$ is a real solution of (1.1) having a limit as $x\to+\infty$, say $+\infty$). We may assume that $f(+\infty)=0$. By subtracting a suitable linear mbination of the $e^{-\alpha_k x}$ we may suppose that

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0. \tag{4.1}$$

rthermore, the resulting solution $f(x)$ is still real since the α_k occur in njugate pairs; also $f(+\infty)=0$. We show now that such a real solution $f(x)$ identically zero.

In view of (3.4) and (4.1) we must have $f(x)=K\{\varphi(x)\}$ where $K\{\varphi(x)\}$ the transform of $\varphi(x)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\int_0^\infty f(x+t)\,dH(t)$. If $f(x)$ would not be entically zero, $|f(x)|$ would attain its maximum for some finite $x=\xi$, ax $|f(x)|=|f(\xi)|=M$, $\xi>0$, $M>0$. Since $|\varphi(x)|\leqq\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\cdot M$ we obtain om (3.8) $|f(x)|<M$. For $x=\xi$ this is a contradiction.

2. *Case 2.* $s_1\geqq h_1$. The proof in this case is less simple since we do not ve now enough exponential solutions in order to effect the relations (4.1). et the existing exponential solutions guaranteed by Lemma 1 be denoted $e^{-\beta_k x}$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, $W(\beta_k)=0$, $\Re(\beta_k)>0$. For convenience we sume again that all β_k are distinct.

Suppose $f(x)$ is a real solution of (1.1) satisfying the condition $f(+\infty)=0$. y a similar adjustment as in Case 1 we may assume that f also satisfies

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-2)}(0)=0. \tag{4.2}$$

f $n=1$, then (4.2) is omitted.] We aim to prove that a solution satisfying .2), and in addition $f(+\infty)=0$, must yield $f(x)=0$. It suffices to prove at $f^{(n-1)}(0)=0$, for then we can proceed as we did in Case 1. Suppose to e contrary that $f^{(n-1)}(0)\neq 0$, say $f^{(n-1)}(0)<0$ for definiteness. [If $f^{(n-1)}(0)>0$ e consider $-f(x)$.] We form the new function

$$\gamma_\eta(x)=f(x)-\mu e^{-\eta x}-\sum_{k=1}^{n-1} b_k e^{-\beta_k x} \tag{4.3}$$

here η is a small positive parameter. The constants μ and b_k are determined cording to the conditions

$$\gamma_\eta(0)=\gamma_\eta'(0)=\cdots=\gamma_\eta^{(n-1)}(0)=0; \tag{4.4}$$

addition, we note that $\gamma_\eta(+\infty)=0$. In particular, by straightforward lculation it is readily seen that $\gamma_\eta(x)$ is real and as η approaches zero, the

coefficient $\mu=\mu(\eta)=f^{(n-1)}(0)\prod_{k=1}^{n-1}(\beta_k-\eta)^{-1}$ approaches $\mu(0)=f^{(n-1)}(0)\prod_{k=1}^{n-1}\beta_k$ which is *negative*.

The constants $b_k=b_k(\eta)$ remain uniformly bounded as $\eta\to+0$. Since $f(+\infty)=0$ and $\Re(\beta_k)>0$ we may choose x so large that

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}b_k e^{-\beta_k x}\right|<-\tfrac{1}{2}\mu(0).$$

Afterward choosing η sufficiently small we see that $\gamma_\eta(x)$ will attain a positive value. Hence $\gamma_\eta(x)$ will have a positive maximum, say M, attained at some finite point ξ, $\xi>0$. Since

$$f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}b_k e^{-\beta_k x}=\gamma_\eta(x)+\mu(\eta)\,e^{-\eta x}$$

is a solution of our differential-integral equation (1.1), we have

$$[(D+\lambda_1)(D+\lambda_2)\dots(D+\lambda_n)]\,\gamma_\eta(x)=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty\gamma_\eta(x+t)\,dH(t)+$$
$$+\mu(\eta)\left\{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty e^{-\eta t}\,dH(t)-(-\eta+\lambda_1)\dots(-\eta+\lambda_n)\right\}e^{-\eta x}.$$

We denote the K-transform of

$$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty\gamma_\eta(x+t)\,dH(t)\quad\text{by}\quad\Gamma_\eta(x).$$

Since $\gamma_\eta(x)$ satisfies the conditions (4.4) we have

$$\gamma_\eta(x)=\Gamma_\eta(x)+\mu(\eta)\left\{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty e^{-\eta t}\,dH(t)-\right.$$
$$\left.-(-\eta+\lambda_1)\dots(-\eta+\lambda_n)\right\}\cdot K\{e^{-\eta x}\}.$$

Inserting $x=\xi$ in this equation, we find, in view of $\gamma_\eta(\xi)=M$, $\Gamma_\eta(\xi)<M$, see (3.8), that

$$\mu(\eta)\left\{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty e^{-\eta t}\,dH(t)-(-\eta+\lambda_1)\dots(-\eta+\lambda_n)\right\}>0.$$

Expanding in powers of η, we see that

$$\mu(\eta)\left\{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\left(1-h_1\eta+\tfrac{h_2}{2}\eta^2\right)-\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\left(1-s_1\eta+\tfrac{s_2}{2}\eta^2\right)+o(\eta^2)\right\}>0$$

Let $s_1>h_1$; for sufficiently small η, the last inequality can prevail only if $\mu(\eta)>0$. The same conclusion follows if $s_1=h_1$ since in this case $h_2-s_2>0$. Consequently, we find in all circumstances $\mu(\eta)>0$ which contradicts $f^{(n-1)}(0)<0$.

The proof of Theorem A is hereby complete.

§ 5. Generalization

We consider again the differential-integral equation (1.1) in which the λ_k are now supposed to be all real and different from 0 (distinct or not). We suppose that $x \geqq 0$.

1. THEOREM B. *Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be negative numbers. The only solution of (1.1) having a finite limit as $x \to +\infty$, is $f(x) = \text{const.}$*

For the proof we denote by $f(x)$ a solution of (1.1) with $f(+\infty) = 0$ and by $\varphi(x)$ the function on the right so that $\varphi(+\infty) = 0$. According to Lemma 3 we have $L\{\varphi(x)\} \to 0$ as $x \to +\infty$. Thus in the L-analog of (3.5) (since $e^{-\lambda_k x} \to \infty$) all A_k must be zero, $f(x) = L\{\varphi(x)\}$.

Now let $M = |f(\xi)| > 0$, $\xi \geqq 0$, be the maximum of $|f(x)|$ for $x \geqq 0$ so that $|\varphi(x)| \leqq |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n| \cdot M$. Here the sign $=$ cannot hold identically since $\varphi(+\infty) = 0$. Hence we infer from (3.13) that $|L\{\varphi(x)\}| < M$, i.e., $|f(x)| < M$ which is a contradiction for $x = \xi$. This completes the proof.

2. Before proceeding to a common generalization of Theorems A and B, let us recapitulate the foregoing results concerning the two transforms K and L. We employ K whenever all λ_k are positive, and L whenever all λ_k are negative. Both transforms satisfy the differential equation (3.3); the first one is completely characterized by conditions (3.4), the second one by the single condition that $L\{\varphi(x)\} \to 0$ (more generally, that L is bounded) as $x \to +\infty$.

THEOREM C. *Let $\{\lambda_k\}$ be a set of n non-vanishing real numbers, $n \geqq 2$; we denote by r the number of the negative λ_k and we assume that $1 \leqq r \leqq n-1$.*

The most general solution of (1.1) which tends to a finite limit as $x \to +\infty$ is a linear combination of certain exponential solutions $\{e^{-\alpha x}\}$ where $\Re(\alpha) > 0$, and of a constant. In particular, there exists an $(n-r)$-dimensional and $(n-r-1)$-dimensional linear manifold of exponential solutions according as the first or second inequality in (1.5) holds, respectively.

In (1.5) we include all λ_k, not only the $n-r$ positive ones.

We note that the function $W(\alpha)$ defined by (1.4) will now have exactly $n-r$ and $n-r-1$ zeros in the half plane $\Re(\alpha) > 0$, respectively. This follows by only a slight modification of the argument of § 2.

Further, we denote by $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ the negative elements, by $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n$ the positive elements of the set $\{\lambda_k\}$. We write again

$$\varphi(x) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty f(x+t)\, dH(t)$$

and decompose the differential-integral equation (1.1) into the two equations:

$$\begin{cases} [(D+\lambda_{r+1})(D+\lambda_{r+2}) \ldots (D+\lambda_n)]\, f(x) = g(x), \\ [(D+\lambda_1)(D+\lambda_2) \ldots (D+\lambda_r)]\, g(x) = \varphi(x). \end{cases} \tag{5.1}$$

3. In Case 1, $s_1 < h_1$, we have $n-r$ independent exponential solutions of (1.1). Thus we may assume that

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-r-1)}(0) = 0, \tag{5.2}$$

and in addition $f(+\infty)=0$; hence $\varphi(+\infty)=0$. From the second equatio (5.1) we conclude that

$$g(x)=L\{\varphi(x)\}+A_1 e^{-\lambda_1 x}+A_2 e^{-\lambda_2 x}+\cdots+A_r e^{-\lambda_r x}$$

where $A_1, A_2, \ldots, A_r$ are constants and $L\{\varphi(x)\}$ is the L-transform of $\varphi(x$ with respect to the negative parameters $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Now using the firs equation (5.1) we conclude, in view of (5.2), that $f(x)=K\{g(x)\}$ where th transform K refers to the positive parameters $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n$.

As observed at the end of § 3, 1, the K-transform of $x^r e^{px}$, $p>0$, $r\geqq 0$ tends to ∞ as $x\to+\infty$. Since $f(x)$ has a finite limit, all A_k in $g(x)$ must b zero, i.e., $g(x)=L\{\varphi(x)\}$, $f(x)=K\{g(x)\}=KL\{\varphi(x)\}$. In explicit form:

$$(5.3)\quad \begin{cases} f(x)=(-1)^r e^{-\lambda_n x}\times \\ \qquad \times\int\int\ldots\int \exp\{(\lambda_n-\lambda_{n-1})u_{n-1}+\cdots+(\lambda_2-\lambda_1)u_1+\lambda_1 u_0\}\times \\ \qquad \times\varphi(u_0)\,du_0\,du_1\ldots du_{n-1}, \end{cases}$$

where the range of integration has the form:

$$0\leqq u_r\leqq u_{r+1}\leqq\cdots\leqq u_{n-1}\leqq x; \qquad 0\leqq u_r\leqq u_{r-1}\leqq\cdots\leqq u_1\leqq u_0<+\infty.$$

Let us now assume that $f(x)$ is not identically zero, and let $M=|f(\xi)$ be the maximum of $|f(x)|$, $\xi>0$, $M>0$. Since $|\varphi(x)|\leqq|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|\cdot M$ w have, by (3.13):

$$|g(x)|\leqq|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r|^{-1}\cdot|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|\cdot M.$$

Now, by (3.8),

$$|f(x)|<(\lambda_{r+1}\lambda_{r+2}\ldots\lambda_n)^{-1}\cdot|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r|^{-1}\cdot|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|\cdot M=M$$

which yields a contradiction for $x=\xi$.

4. In dealing with Case 2, $s_1\geqq h_1$, we may be brief. We have $n-r-$ solutions $\{e^{-\beta_k x}\}$, $\Re(\beta_k)>0$, so that we may assume

$$(5.4)\qquad f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-r-2)}(0)=0$$

(if $n-r=1$ this condition must be omitted), and also $f(+\infty)=0$. We suppos as in § 4.2 that $f^{(n-r-1)}(0)<0$.

For positive η we introduce $\gamma_\eta(x)$ as in (4.3) so that (4.4) holds ($n-r-$ must be written in place of $n-1$); also $\gamma_\eta(+\infty)=0$. Since $\gamma_\eta(x)+\mu(\eta)e^{-\eta$ satisfies (1.1) we find

$$(5.5)\quad \begin{cases} [(D+\lambda_{r+1})\ldots(D+\lambda_n)]\,\gamma_\eta(x)+ \\ \qquad +\mu(\eta)(-\eta+\lambda_{r+1})\ldots(-\eta+\lambda_n)\,e^{-\eta x}=g_\eta(x), \\ [(D+\lambda_1)\ldots(D+\lambda_r)]\,g_\eta(x) \\ \qquad =\lambda_1\ldots\lambda_n\int_0^\infty\gamma_\eta(x+t)\,dH(t)+\mu(\eta)\,\lambda_1\ldots\lambda_n\,e^{-\eta x}\int_0^\infty e^{-\eta t}\,dH(t) \end{cases}$$

where $g_\eta(x)$ is defined by the first equation. Let us denote the L-transform referring to $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$) of

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty \gamma_\eta(x+t)\, dH(t) \quad \text{by} \quad \Delta_\eta(x).$$

We have from the second equation (5.5):

$$g_\eta(x) = \Delta_\eta(x) + \mu(\eta)\, \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty e^{-\eta t}\, dH(t) \cdot L\{e^{-\eta x}\} + \sum_{k=1}^{r} A_k e^{-\lambda_k x}.$$

Now we conclude from the first equation (5.5) (K refers to $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$):

$$\begin{aligned}\gamma_\eta(x) &= K\{g_\eta(x)\} - \mu(\eta)\,(-\eta+\lambda_{r+1}) \ldots (-\eta+\lambda_n)\, K\{e^{-\eta x}\} \\ &= K\{\Delta_\eta(x)\} + \mu(\eta)\, \lambda_1 \ldots \lambda_n \int_0^\infty e^{-\eta t}\, dH(t) \cdot KL\{e^{-\eta x}\} - \\ &\quad - \mu(\eta)\,(-\eta+\lambda_{r+1}) \ldots (-\eta+\lambda_n)\, K\{e^{-\eta x}\};\end{aligned}$$

the constants A_k must all be zero since $\gamma_\eta(x)$ is bounded as $x \to +\infty$.

Again, for sufficiently small η, $\max \gamma_\eta(x) = M > 0$ is attained for some $x = \xi$, $\xi > 0$. Since

$$(-1)^r \Delta_\eta(x) = L\left\{|\lambda_1 \ldots \lambda_r| \cdot \lambda_{r+1} \ldots \lambda_n \int_0^\infty \gamma_\eta(x+t)\, dH(t)\right\}$$

and $\int_0^\infty \gamma_\eta(x+t)\, dH(t) \to 0$ as $x \to +\infty$, we have by (3.13):

$$\Delta_\eta(x) < \lambda_{r+1} \ldots \lambda_n \cdot M.$$

We use (3.8) and obtain, in view of (3.12):

$$\begin{aligned}\gamma_\eta(x) < M + \mu(\eta) \Big\{ &\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty e^{-\eta t}\, dH(t)\, [(-\eta+\lambda_1) \ldots (-\eta+\lambda_r)]^{-1} - \\ &- (-\eta+\lambda_{r+1}) \ldots (-\eta+\lambda_n) \Big\} K\{e^{-\eta x}\}.\end{aligned}$$

Hence, as in § 4.2,

$$(-1)^r \mu(\eta) \left\{ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty e^{-\eta t}\, dH(t) - (-\eta+\lambda_1) \ldots (-\eta+\lambda_n) \right\} > 0.$$

Expanding we see that

$$(-1)^r \mu(\eta) \left\{ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \left(1 - h_1 \eta + \frac{h_2}{2} \eta^2\right) - \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \left(1 - s_1 \eta + \frac{s_2}{2} \eta^2\right) + o(\eta^2) \right\} > 0,$$

$$\mu(\eta)\,(s_1 - h_1) > 0 \quad \text{if} \quad s_1 > h_1,$$

$$\mu(\eta)\,(s_2 - h_2) > 0 \quad \text{if} \quad s_1 = h_1, \quad s_2 > h_2.$$

The contradiction is apparent (see § 4.2).

§ 6. Another Differential-Integral Equation

In this section we consider the equation (1.6) in which the constants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are again all real and different from zero (distinct or not). In this case, however, x runs over all real values [in contrast to (1.1) where x was non-negative]. Thus in the present situation no exponential solution exists which remains "stable" on the whole range except the constant. We prove

THEOREM D. *The only solutions of* (1.6) *where the numbers* $\{\lambda_k\}$ *are real and different from zero, having finite limits as* $x \to +\infty$ *and* $x \to -\infty$, *are* $f(x) = \text{const}$.

1. We denote by $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ the negative members of the set $\{\lambda_k\}$ and by $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n$ the remaining (positive) ones, and we decompose (1.6) as follows:

$$(6.1) \qquad \begin{cases} [(D+\lambda_{r+1})(D+\lambda_{r+2}) \ldots (D+\lambda_n)] f(x) = g(x), \\ [(D+\lambda_1)(D+\lambda_2) \ldots (D+\lambda_r)] g(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

where $\varphi(x)$ is the function on the right-hand side of (1.6). Replacing x by $-x$ in the first equation, we obtain

$$(6.2) \qquad [(D-\lambda_{r+1})(D-\lambda_{r+2}) \ldots (D-\lambda_n)] (-1)^{n-r} f(-x) = g(-x).$$

From the second equation (6.1) we conclude

$$g(x) = L\{\varphi(x)\} + \sum_{k=1}^{r} A_k e^{-\lambda_k x}$$

where the transform L is taken with the negative constants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Further, we obtain from (6.2):

$$(6.3) \qquad (-1)^{n-r} f(-x) = L^* L_1 + \sum_{k=1}^{r} A_k L^*\{e^{\lambda_k x}\} + \sum_{k=r+1}^{n} A_k e^{\lambda_k x}$$

where the symbols L_1 and L^* can be explained as follows: First, in $L\{\varphi(x)\}$ we replace x by $-x$; the resulting function (transform) is denoted by $L_1 = L_1(x)$. To this function we apply the L-transform L^* associated with the negative parameters $-\lambda_{r-1}, -\lambda_{r-2}, \ldots, -\lambda_n$. Since $f(x)$, hence also $\varphi(x)$, is bounded, the transforms L_1 and L^* are bounded. Taking $x \to -\infty$ and $x \to +\infty$ we see that all constants A_k must vanish so that $(-1)^{n-r} f(-x) = L^* L_1$.

2. The case $f(+\infty) = f(-\infty)$ (say $= 0$) can be dealt with in the familiar way. Indeed, if f would not be identically zero, $\max |f(x)| = M > 0$ would be attained for a finite $x = \xi$. Using (3.13) and inserting $x = -\xi$ in (6.3) a contradiction follows.

Let $f(+\infty) = +1$ and $f(-\infty) = -1$. It is easy to show that $\varphi(+\infty) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ and $\varphi(-\infty) = -\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ (decompose the integral $\varphi(x)$ into three parts corresponding to the ranges $-\infty, -\omega$; $-\omega, +\omega$; $+\omega, +\infty$). By applying Lemma 3 and its corollary (to L_1 and L^*, respectively) we obtain that $f'(x) \to 0$ as $x \to +\infty$ and $x \to -\infty$. Since $f'(x)$ cannot vanish identically (other-

ise $f(x)$ would be constant, a contradiction) $\max |f'(x)| = M' > 0$ will be attained
r a finite $x = \xi$.

Now we observe that the function $\varphi(x)$ is differentiable and

$$\varphi'(x) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} f'(x+t)\, dH(t). \tag{6.4}$$

ndeed, $f'(x)$ is bounded so that the integral in (6.4) is uniformly convergent.

From (1.6) we obtain by differentiation

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (D + \lambda_k)\right] f'(x) = \varphi'(x) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_{0}^{\infty} f'(x+t)\, dH(t), \tag{6.5}$$

r from (6.1):

$$\begin{cases} [(D+\lambda_{r+1})(D+\lambda_{r+2}) \dots (D+\lambda_n)]\, f'(x) = g'(x), \\ [(D+\lambda_1)(D+\lambda_2) \dots (D+\lambda_r)]\, g'(x) = \varphi'(x). \end{cases} \tag{6.6}$$

s above we have

$$[(D-\lambda_{r+1})(D-\lambda_{r+2}) \dots (D-\lambda_n)]\, (-1)^{n-r} f'(-x) = g'(-x). \tag{6.7}$$

Now using the same argument as before we find as in (6.3): $(-1)^{n-r} f'(-x) = {}^*L_1$ where the L-transforms must be applied to $f'(x)$ in a similar fashion s above.

This yields a contradiction in the usual manner so that $f(+\infty)$ must oincide with $f(-\infty)$ and so $f(x) = \text{const}$.

7. A Semi-Group Extension of the Differential-Integral Equation (1.1) [3]

1. The analysis concerning existence and uniqueness of solutions of the ifferential-integral equation (1.1) can be generalized in the following manner. Ve consider the equation

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (A + \lambda_k)\right] f(x) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_{0}^{\infty} (T_t f)(x)\, dH(t), \qquad x \in I, \tag{7.1}$$

here again λ_k denote real non-zero constants and H represents a cumulative istribution function. Moreover, T_t $(t > 0)$ designates a semi-group of bounded near transformations which act on an appropriate linear space of bounded unctions Γ, mapping Γ into itself (each f in Γ is defined on a set I); A re-resents the infinitesimal generator of T_t. In formal terms $T_t \sim e^{tA}$.

We shall assume in what follows that T_t is continuous in t in the sense hat if t_n tends to t, then for each f in Γ, $(T_{t_n} f)(x)$ converges to $(T_t f)(x)$ for $\in I$. For our purposes we need not require the convergence to be uniform ith respect to the variable x. (The reader will find that this notion of con-nuity of T_t does not conform to the customary one which involves conver-ence in a Banach space.) It is also usual to define $T_0 =$ the identity mapping

[3] We express our indebtedness to Professors J. McGregor and H. Scarf for several aluable comments related to Section 7.

and postulate the continuity of T at $t=0$ as well. In most examples of sem groups encountered in applications these conditions are easily seen to b satisfied (see [4]). In the particular cases discussed below continuity of at the origin is identical to a version of a classical summability theorem

We also assume that the semi-groups considered are composed of uniforml bounded linear transformations. This means that for every f in Γ, $T_t f$ i uniformly bounded jointly in the variables t and x.

The linear operator A may be defined rigorously as follows: A functio f in Γ belongs to the domain of A if

$$\frac{(T_t f)(x) - f(x)}{t}$$

converges for each x in I as t tends to zero, and the limit function $g(x)$ is member of Γ. In that case, we set $Af=g$.

We shall be interested in determining the most general solution of (7.1 which belongs to Γ and obeys a suitable boundary condition. In speakin of solutions, we concentrate attention to functions of Γ belonging to th domain of A and verifying the integral equation (7.1). The boundary conditio will express the natural analog of the limit requirement "$\lim_{x\to\infty} f(x)$ exists which played so prominent a role in our investigations of Sections 1—6

2. To illustrate the generality involved in the study of equation (7.1 we cite three examples, each of which are examined in more detail in th final Section 9.

(a) Let Γ represent the space of all bounded continuous functions define on the interval $I=[0, \infty]$. We set $(T_t f)(x)=f(x+t)$. It is plain to see tha $A=d/dt$. In this case, equation (7.1) reduces to (1.1).

If we enlarge T_t to embrace the full translation group so that t varie from $-\infty$ to $+\infty$ and $H(t)$ is correspondingly extended so as to represen a distribution on the full line, then the analog of (7.1) becomes (1.6).

The existence and uniqueness of solutions of (1.6) subject to the boundar condition "$\lim f(x)$ exists as $x\to+\infty$ and $x\to-\infty$" has been thoroughl explored in our discussions of Section 6.

(b) Let I denote the real line, i.e., $I=[-\infty, \infty]$ and determine Γ t consist of all bounded continuous functions defined on I. We define for in Γ and $t\geqq 0$

$$(7.2) \qquad (T_t f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2t}(x-y)^2} f(y)\, dy, \qquad x \in I.$$

An equivalent way of describing this semi-group is to recognize $T_t f$ a the solution $u(t, x)$ of the heat equation

$$(7.3) \qquad u_t = \tfrac{1}{2} u_{xx}, \quad \text{under the initial condition}$$

$$u(0, x) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

It follows easily from (7.2) that $Af = \frac{1}{2}f''$ wherever f'' is continuous. Hence, with this substitution for A, (7.1) becomes

$$\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\tfrac{1}{2}D^2+\lambda_k\right)\right]f(x)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\int_0^\infty u(t,x)\,dH(t) \quad \text{for} \quad -\infty<x<\infty. \tag{7.4}$$

The semi-group, generated by the heat equation in several dimensions (say, p), is fitted into a similar framework provided the following identifications are made:

(1) I = Euclidean p-space (E^p);

(2) Γ consists of all continuous bounded functions defined on I. The semi-group of the heat equation in p-dimensions possesses for each x in I the representation formula

$$(T_t f)(x)=\frac{1}{(2\pi t)^{p}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{p}(x_k-y_k)^2}f(y_1,y_2,\ldots,y_p)\,dy_1\ldots dy_p \tag{7.5}$$

(x stands for the vector $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$).

Alternatively, $T_t f(x) = u(t, x)$ represents the solution of the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\nabla^2 u, \text{ under the initial condition } u(0,x)=f(x). \tag{7.6}$$

Here $A=\frac{1}{2}\nabla^2$ and the corresponding differential-integral equation (7.1) is of the explicit form

$$\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\nabla^2+\lambda_k\right)\right]f(x)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\int_0^\infty u(t,x)\,dH(t), \qquad x\in I. \tag{7.7}$$

If we restrict our objectives so as to characterize only radial solutions of (7.7), i.e., solutions for which $f(x_1, \ldots, x_p) = f(r)$, $r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_p^2}$, then the induced semi-group is generated by the infinitesimal operator

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{p-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{7.8}$$

and $(T_t f)(r)$ represents the solution of the equation $u_t = Au$ subject to the initial condition $u(0, r) = f(r)$. In the radial case, $I=(0, \infty)$.

(c) For our final example we take I countable discrete. Without loss of generality we set $I=\{0, 1, 2, \ldots\}$. The space Γ comprises the set of all bounded sequences $f=(f_0, f_1, f_2, \ldots)$.

Consider the following semi-group:

$$(T_t f)(i)=\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}(t)\,f_j \qquad i=0,1,2,\ldots \tag{7.9}$$

where

$$P_{ij}(t)=\frac{(\lambda t)^i}{(1+\lambda t)^{i+1}}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{i+j-k}{j}\left(\frac{1-\lambda t}{\lambda t}\right)^k\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^{j-k} \quad \text{for} \quad i\leqq j \tag{7.10}$$

and $P_{ij}(t)$ for $i>j$ is constructed from the formula (7.10) by interchanging i and j on the right-hand side; $\lambda>0$. We have, in particular,

$$P_{0j}(t)=\frac{(\lambda t)^j}{(1+\lambda t)^{j+1}}.$$

The semi-group character of $P(t)=(P_{ij}(t))$, although not obvious from the analytical formula (7.10), can be established, with some calculation. For a more transparent analysis we refer to [5]. This semi-group has its origin in the study of linear growth birth and death stochastic processes, and can be construed as the semi-group arising from a discrete version of a diffusion equation with linear coefficients. Specifically, $(T_t f)(n)=u_n(t)$ solves the equation

$$(7.11)\quad \frac{du_n(t)}{dt}=n\lambda u_{n-1}(t)-(2n+1)\lambda u_n(t)+(n+1)\lambda u_{n+1}(t),\quad n=0,1,2,\ldots$$

where

$$u_{-1}(t)=0 \quad \text{and} \quad u_n(0)=f_n.$$

An alternative representation of $P_{ij}(t)$ in terms of the classical Laguerre polynomials exists, viz.,

$$P_{ij}(t)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-xt}\,Q_i(x)\,Q_j(x)\,e^{-x/\lambda}\,dx,\quad \lambda>0,$$

where $Q_i(x)=L_i(x/\lambda)$ and L_i is the i^{th} Laguerre polynomial normalized so that $L_i(0)=1$ [5, p. 652].

§ 8. Formal Characterization of All Solutions of Equation (7.1)

1. Our aim is to characterize the most general solution of (7.1) satisfying certain boundary conditions. In the case of the translation semi-group the appropriate boundary condition involved all functions in Γ obeying the restriction: "$\lim_{x\to\infty} f(x)$ exists". (Henceforth, without specification to the contrary, any statement as to the existence of a limit will be recognized only when the limit value is finite.)

In the case of the semi-group (7.2) we shall determine those solutions f in Γ, which have the property that

$$(8.1)\quad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

exists.

The study of the radial function solutions of (7.7), that is the characterization of all solutions satisfying (7.1) when A is given by (7.8), may be accomplished if we restrict ourselves to those solutions which fulfill the boundary condition

$$(8.2)\quad \text{"}\lim_{r\to\infty}\frac{p}{r^p}\int_0^r f(x)\,x^{p-1}\,dx \quad \text{exists"}.$$

With regard to the semi-group of example (c) we shall see that the associated boundary condition states the existence of the limit of the sequence $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f_j$.

2. The method of analysis for the determination of solutions of (7.1) consists in converting the problem to the case of the translation semi-group [i.e., Equation (1.1)] whose complete solution has been revealed in our previous discussions (Section 2—5).

We proceed as follows. Consider any solution of (7.1) with f in Γ and form

$$w(t, x) = (T_t f)(x), \quad t > 0, \quad x \in I. \tag{8.3}$$

Applying the transformation T_s to both sides in (7.1) and using the operator identity $T_s A = \frac{dT_s}{ds}$ [4, p. 308] formally, we obtain, employing the semi-group character of T_t, that

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (D_s + \lambda_k)\right] w(s, x) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty w(s + t, x)\, dH(t), \quad \left(D_s = \frac{d}{ds}\right). \tag{8.4}$$

This is Equation (1.1) in which $w(s, x)$ is a solution viewed as a function of s for each fixed x in I. Moreover, $w(s, x)$ is continuous and bounded in s by virtue of the corresponding assumptions imposed on the semi-group T_s. In our three illustrations, the truth of (8.4) can be easily ascertained by direct calculation. For example, in the situation of the heat equation the derivation of (8.4) amounts to some simple manipulations of the addition formula satisfied by the Gaussian distribution.

The determination of all solutions of (8.4) was made explicit (Theorem C) provided we are restricted to those solutions for which

$$\lim_{s \to \infty} w(s, x) \quad \text{exists.} \tag{8.5}$$

This suggests what the general boundary condition should be, and how to state precisely the problem we are solving. Specifically, we are seeking to delimit that class of solutions f of (7.1) in Γ which possess the property (8.5). Unfortunately, such a formulation of the boundary condition appears in a non-intrinsic form as it involves implicitly unknown ergodic characteristics of the semi-group T_t. We prefer to express the boundary condition directly in terms of the functions of Γ so that any f in Γ satisfying the boundary condition would automatically verify relation (8.5).

We shall see later in our examples how this can be done. Motivated by the results of these examples, we are able to suggest an abstract formulation of the boundary condition.

3. Let us suppose for the present, continuing to maintain generality, that the solution $f(x)$ in Γ satisfies the condition (8.5) for each x in I. By virtue of Theorem C, we deduce that

$$w(s, x) = \sum_{l=0}^{m} \gamma_l(x)\, e^{-\alpha_l s}; \tag{8.6}$$

here m depends on the comparison of the quantities s_1 and h_1, see Section 2, and the number of positive terms occurring in the sequence λ_k. The α_l are

the solutions of the transcendental equation

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda_k}\right)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}dH(t) \tag{8.7}$$

for which $\Re(\alpha_l)>0$, $l=1, 2, \ldots, m$, and $\alpha_0=0$. When multiple roots of (8.7) appear, then the usual conventions are adopted in order to keep the validity of the representation (8.6). (The repeated exponentials are replaced by suitable algebraic powers times exponentials.)

Applying A to both sides of (8.6) and taking account of the operator identity $A\,T_s=\frac{d}{ds}T_s$ [recall $T_s f=w(s, x)$], we secure that

$$A\,\gamma_l(x)=-\alpha_l\gamma_l(x). \tag{8.8}$$

[Since $w(s, x)$ belongs to the domain of A for each $s\geqq 0$, we infer easily that $\gamma_l(x)$ is likewise in the domain of A for each l.] Allowing s to approach zero, we note that $(T_s f)(x)\to f(x)$ for each x in I. Hence the most general solution of (7.1), with the property (8.5), is of the form

$$f(x)=\sum_{l=0}^{m}\gamma_l(x) \tag{8.9}$$

and $\gamma_l(x)$ are solutions of (8.8) in Γ.

4. We now prove the converse, i.e., that every representation of the form (8.9) provides a solution to (7.1) fulfilling the proper boundary conditions. We must show that each non-trivial $\gamma_l(x)$ in Γ which solves (8.8) for the prescribed α_l is itself a solution of (7.1). Indeed, (8.8) implies, by virtue of the identity $T_s A=\frac{d}{ds}T_s$, that

$$\frac{d}{ds}T_s\gamma_l(x)=-\alpha_l T_s\gamma_l(x).$$

This first-order linear differential equation may be integrated and we have

$$T_s\gamma_l(x)=\gamma_l(x)\,e^{-\alpha_l s}. \tag{8.10}$$

Equations (8.7), (8.8), and (8.10) in conjunction show that $\gamma_l(x)$ verify (7.1) and also obey the boundary condition (8.5). We refer to the $\gamma_l(x)$ as the basic solutions.

The form of the general solution of (7.1) for f in Γ satisfying (8.5) is now completely specified by the representation (8.9). In the following section we shall elaborate on the meaning of the boundary condition (8.5) in addition to furnishing analytical expressions for the basic solutions $\gamma_l(x)$ of examples (b) and (c).

5. We close this section with a proposal regarding the nature of the appropriate boundary condition for Equation (7.1) in the case of a general semi-group induced by a recurrent diffusion stochastic process (see [3]). Let us consider a semi-group of transformations T_t defined on the functions of Γ into itself and let $\mu(x)$ designate a stationary measure of the semi-group in the generalized

ense of DERMAN [2] (μ is usually unique apart from a multiplicative constant). t is known that μ is finite on every compact subset of I. It may happen hat $\mu(I)=\infty$ and indeed this is so for the most interesting cases.

We construct a one-parameter family of truncated positive measures $_t(t>0,\ \mu_t(I)=1)$ with the property that for each compact subset U of I, $_t(U)$ converges to $\mu(U)$ as $t\to\infty$.

With these preparations we will now formulate the relevant boundary ondition (labelled B) in terms of the measures μ_t. Generally, we say that in Γ obeys the boundary condition B if the sequence $\int_I f(x)\,d\mu_t(x)$ converges o a finite limit as t increases to infinity.

It is interesting to see what the boundary condition B becomes when pplied to examples (a)—(c) of Section 7, all of which qualify as semi-groups f diffusion stochastic processes.

In the case of the translation semi-group $((T_t f)(x)=f(x+t)$ and I is the on-negative real line), the stationary measure μ consists of placing unit nass at $+\infty$. Accordingly, μ_t can be defined as the measure which places single unit mass at the point t $(t>0)$. Clearly, μ_t tends to μ in the sense lescribed above. Moreover, for f in Γ

$$\int_0^\infty f(x)\,d\mu_t(x)=f(t).$$

Hence, the assertion that f satisfies the boundary condition B is equivalent o the existence of a finite limit for $f(t)$ as t increases to infinity, which is xactly the boundary restriction underlying the analysis of Sections 2—5.

The semi-group (7.2) of the one-dimensional heat equation has as its tationary measure the Lebesgue measure of the infinite line. We may ake μ_t as the uniform distribution spread on the interval $[-t, t]$. The measures $_t$ fulfill the required properties. In this case the interpretation that f verifies he boundary condition B means relation (8.1).

For the radial process of the heat equation in p dimensions the boundary ondition takes the form (8.2). Plainly, the stationary measure of this process s $p\,x^{p-1}\,dx$ concentrating on the positive axis.

The stationary measure of the semi-group of example (c) assigns a unit nass at all the non-negative integer points. We define μ_t as the measure vhich concentrate mass of amount $1/[t+1]$ at the integer points $0\leqq n\leqq[t]$. Consequently, a function $f=(f_j)$ obeys the boundary condition B for this xample if and only if

8.11) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f_j \quad \text{exists.}$$

§ 9. Some Special Semi-Groups

In this section we apply the previous theory to the solution of the differential-integral equation (7.1) associated with the semi-groups of operators lescribed in examples (b) and (c) of Section 7.

1. We concentrate first on the semi-group of the radial process induced y the heat equation in p Euclidean variables $(p\geqq 2)$. Specifically, our task

is to determine the form of the solutions of the equation

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(A+\lambda_k)\right] f(r) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_0^\infty v(t,r)\, dH(t), \quad r>0, \tag{9.1}$$

where A is the infinitesimal operator (7.8), $v(t,r)=T_t f$ is the solution of $\frac{\partial v}{\partial t}=Av$ under the initial condition $v(0,r)=f(r)$, and f is subject to the boundary conditions: f is bounded, continuous (i.e., f in Γ), and we have (8.2).

The key lemma is as follows.

LEMMA 4. *If f is continuous and bounded, and satisfies* (8.2), *then* $\lim_{t\to\infty}(T_t f)(r)$ *exists for each $r>0$ and coincides with the constant limit* (8.2).

Proof. The semi-group operator $T_t f(r)$ is known to possess the explicit representation

$$(T_t f)(r) = e^{-\frac{r^2}{2t}} \cdot \frac{1}{r^\nu t} \int_0^\infty e^{-\frac{\varrho^2}{2t}} I_\nu\left(\frac{\varrho r}{t}\right) \varrho^{\nu+1} f(\varrho)\, d\varrho, \qquad \nu = \frac{p}{2}-1, \tag{9.2}$$

where $I_\nu(x)$ denotes the Bessel function of order ν with imaginary argument. This expression may be independently deduced from (7.5) with f a radial function by integrating out the angle variables in polar coordinates.

To prove that $(T_t f)(r)$ tends to the limit (8.2) as t increases to infinity, we observe first that the case $f(r)=1$ is trivial since $T_t 1=1$ identically in r and t [4]). Thus we may suppose without loss of generality that the limit in (8.2) is zero (otherwise, we deal with $f-a$ for an appropriate constant a). We have to show that $\lim_{t\to\infty}(T_t f)(r)=0$ for every fixed positive r. In the sequel we set, for the sake of simplicity, $r=1$.

Let $\varepsilon>0$ be given. We first choose $\eta=\eta(\varepsilon)$ so small that

$$\begin{cases} e^{-\frac{\varrho^2}{2t}} I_\nu\left(\frac{\varrho}{t}\right) = [c_\nu + h(\varrho,t)]\left(\frac{\varrho}{t}\right)^\nu, \\ c_\nu = [2^\nu \Gamma(\nu+1)]^{-1}, \quad |h(\varrho,t)| \leqq \varepsilon, \end{cases} \tag{9.3}$$

for all ϱ satisfying $\varrho^2/t \leqq \eta^2$ and $t \geqq 1$. We now split the range of integration in (9.2) into $[0, \eta\sqrt{t}]$ and $[\eta\sqrt{t}, \infty]$ so that

$$|(T_t f)(1)| \leqq \frac{1}{t}\left|\int_0^{\eta\sqrt{t}} \cdots\right| + \frac{1}{t}\left|\int_{\eta\sqrt{t}}^\infty \cdots\right| = A_1 + A_2. \tag{9.4}$$

The first term A_1 of (9.4) can be estimated by using (9.3):

$$A_1 \leqq c_\nu \eta^p \frac{1}{(\eta\sqrt{t})^p}\left|\int_0^{\eta\sqrt{t}} \varrho^{p-1} f(\varrho)\, d\varrho\right| + \varepsilon \eta^p M$$

where M is a constant obtained from the uniform bound of f. Consequently,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} A_1 \leqq \varepsilon \eta^p M.$$

[4]) This also follows from a formula of SONINE [7, p. 394 (4)].

To estimate A_2, we introduce $G_\nu(\xi)=\xi^{-\nu}I_\nu(\xi)$,

$$F(\varrho)=\int_0^\varrho x^{p-1}f(x)\,dx, \qquad \delta(t)=\sup_{\varrho\geqq\eta|t}\varrho^{-p}|F(\varrho)|$$

and integrate by parts:

$$A_2=\frac{1}{(|t)^p}\left|\int_{\eta|t}^\infty e^{-\frac{\varrho^2}{2t}}G_\nu\left(\frac{\varrho}{t}\right)F'(\varrho)\,d\varrho\right|$$

$$\leqq G_\nu\left(\frac{\eta}{|t}\right)\frac{|F(\eta|t)|}{(|t)^p}+\frac{1}{(|t)^p}\int_{\eta|t}^\infty e^{-\frac{\varrho^2}{2t}}\left|\frac{\varrho}{t}\,G_\nu\left(\frac{\varrho}{t}\right)+\frac{1}{t}\,G_\nu'\left(\frac{\varrho}{t}\right)\right||F(\varrho)|\,d\varrho.$$

The first term tends to zero as $t\to\infty$ by virtue of the hypothesis. The second term is bounded by

$$\frac{\delta(t)}{(|t)^p}\int_0^\infty e^{-\frac{\varrho^2}{2t}}\varrho^p\left|\frac{\varrho}{t}\,G_\nu\left(\frac{\varrho}{t}\right)+\frac{1}{t}\,G_\nu'\left(\frac{\varrho}{t}\right)\right|d\varrho$$

which by an obvious change of variables reduces to

$$\delta(t)\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{\varrho^2}{2}}\varrho^p\left|\varrho\,G_\nu\left(\frac{\varrho}{|t}\right)+\frac{1}{|t}\,G_\nu'\left(\frac{\varrho}{|t}\right)\right|d\varrho.$$

Since $\nu\geqq 0$ and G_ν and G_ν' are strictly increasing functions when their arguments traverse the positive axis (see [7]), we obtain, provided $t\geqq 1$, the bound

$$\delta(t)\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{\varrho^2}{2}}\varrho^p\left[\varrho\,G_\nu(\varrho)+G_\nu'(\varrho)\right]d\varrho=\delta(t)\,O(1).$$

This tends to zero as t increases to infinity, again by invoking the hypothesis. The proof of the lemma is hereby complete.

2. There is no difficulty in justifying all the remaining formal operations of the preceding sections.

The only bounded solution of $A\gamma=-\alpha_l\gamma$ is known (apart from a constant factor) to be $r^{-\frac{p}{2}+1}\,J_{\frac{p}{2}-1}\left(\sqrt{2\alpha_l}\,r\right)$ which by direct computation satisfies (8.2).

Hence the general bounded solution of (9.1) satisfying (8.2) has the representation

$$f(r)=a_0+\sum_{l=1}^m a_l J_{\frac{p}{2}-1}\left(\sqrt{2\alpha_l}\,r\right)r^{-\frac{p}{2}+1}$$

where a_l, $l=0, 1, 2, \ldots, m$, are arbitrary constants and α_l are the roots of (8.7) for which $\Re(\alpha_l)>0$.

Similar considerations apply to the study of (7.1) for the case of the one-dimensional heat equation. The arguments are in fact more simple. The final result obtained states that the most general bounded solution f of (7.4),

for which (8.1) is fulfilled, is of the form

$$f(x) = a_0 + \sum_{l=1}^{m} \left(a_l \cos \sqrt{2\alpha_l}\, x + b_l \sin \sqrt{2\alpha_l}\, x\right)$$

where α_l, $\Re(\alpha_l) > 0$, satisfy (8.7). Here $\cos \sqrt{2\alpha_l}\, x$ and $\sin \sqrt{2\alpha_l}\, x$ are the basic solutions of $Af = \frac{D^2 f}{2} = -\alpha_l f$.

3. We close with a brief discussion of equation (7.1) for the semi-group of (7.9). A function $f = (f_j)$ satisfies the relevant boundary condition if and only if f_j are uniformly bounded and (8.11) is fulfilled.

We may prove

LEMMA 5. *If $f = (f_j)$ is bounded and satisfies* (8.11), *then*

$$(T_t f)(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) f_j$$

tends to a limit as t grows to infinity.

The proof goes parallel to the argument of Lemma 4. The explicit formula for $P_{ij}(t)$ as displayed in (7.10) is used. The summation involved in $(T_t f)(i)$ is split into two parts, one consisting of the integers between 0 and $[\eta t]$ and the other composed of the remaining range of integers (η is to be chosen sufficiently small). In the first range $P_{ij}(t)$ is close to $1/\eta t$ and this part converges because of the hypothesis. Summation by parts is applied to the second summand and the result follows. We omit the formal details.

All the other identities concerning T_t are obtained in a straightforward fashion by utilizing the available expression of T_t. The solutions of $A\gamma = -\alpha_l \gamma$ are recognized as the sequence $\gamma_j = L_j(\alpha_l/\lambda)$ where L_j is the j^{th} Laguerre polynomial normalized such that $L_j(0) = 1$; $\lambda > 0$. Hence the most general bounded solution of (7.1) for the semi-group (7.9) satisfying (8.11) is of the form

$$f_j = \sum_{l=1}^{m} a_l L_j\left(\frac{\alpha_l}{\lambda}\right) + a_0$$

where the a_l are arbitrary constants and α_l satisfy (8.7) with $\Re(\alpha_l) > 0$.

Bibliography

[1] ARROW, K. J., S. KARLIN, and H. SCARF: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Chap. 14. Stanford University Press 1958. — [2] DERMAN, C.: A Solution to a Set of Fundamental Equations in Markov Chains. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 332–334 (1954). — [3] FELLER, W.: Diffusion Processes in One Dimension. Trans. Amer. Math. Soc. **77**, 1–31 (1954). — [4] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications **36** (1957). — [5] KARLIN, S., and J. MCGREGOR: Linear Growth, Birth and Death Processes. J. Math. and Mech. **7**, 643–662 (1958). — [6] SMITH, W. L.: On the Distribution of Queueing Times. Proc. Cambridge Phil. Soc. **49**, 449–461 (1953). — [7] WATSON, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, second edition. Cambridge and New York 1944.

Dept. of Math., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 23. März 1959)

Geiringer, H.
Math. Zeitschr. 72, 229–234 (1960)

On a limit theorem leading to a compound Poisson distribution

To the memory of Leon Lichtenstein

By
Hilda Geiringer

1. One of the best known (and most easily proved) limit theorems of probability theory is the statement that the binomial distribution

$$q_n(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

(i.e. the probability of obtaining x successes in n independent trials with constant success probability p) converges towards the Poisson distribution

$$(1) \qquad q(x) \equiv \lim_{n\to\infty} q_n(x) = \psi(x,a) \equiv \frac{a^x e^{-a}}{x!}, \qquad a>0, \qquad x=0,1,2,\ldots.$$

Hereby, as $n\to\infty$, x remains fixed and p decreases in such a way that $np=a$ retains a finite value; thus $p=\frac{a}{n}$, $1-p=1-\frac{a}{n}$. This classical result was generalized by R. v. Mises[1]) who considered, instead of n "Bernoulli trials" with unchanged probabilities, the so-called "Poisson scheme" of n alternatives $p_\nu(1)=p_\nu$, $p_\nu(0)=1-p_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,n$ and assumed that as $n\to\infty$,

$$(2) \qquad p_1+p_2+\cdots+p_n=a$$

remains fixed. Then $q_n(x)$, the probability of n successes in n Poisson trials, still converges towards the right side of (1) with the "a" given by (2).

A general situation of rare events is obviously one where each distribution function $P_\nu(x)$ has at $x=0$ a jump of amount $1-\frac{A_\nu}{n}$, which tends to one as $n\to\infty$, $\nu=1,2,\ldots,n$, and is otherwise arbitrary. The author has considered[2]) in 1928 an extension of the Poisson-Mises result which, however, for reasons that will appear in Sec. 4, does not deal with the above case in its generality.

We consider n distributions $p_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ldots,n$; $x=0,1,2,\ldots,m$; thus, the generalization consists in assuming more general arithmetical distributions

---

[1]) Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. Z. angew. Math. Mech. **1**, 121–124 (1921).

[2]) Über die Poissonsche Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen. Z. angew. Math. Mech. **8**, 292–309 (1928).

with jumps at $0, 1, 2, \ldots, m$ [3]). In each of these distributions all probabilities except that for $x=0$ are "small". By that we mean the following: if r_ν denotes the probability of a non-zero event at the ν^{th} trial,

$$r_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} p_\nu(\mu), \qquad p_\nu(0) = 1 - r_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

we assume that r_ν is of the order $1/n$; or, more precisely: if R_n is greater than all r_ν, $R_n > r_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, it is assumed that

$$R_n < \frac{C}{n}, \tag{4}$$

where C is a positive constant. We also put

$$\begin{cases} a_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(\mu), & \mu = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu = a. \end{cases} \tag{5}$$

We consider $q_n(x)$, the probability of obtaining a sum x in n such trials, and we wish, in particular, to determine the limit of $q_n(x)$ as $n \to \infty$ in the way just explained, where (4) holds and the a_μ remain finite.

The problem is solved very easily [see l. cit. [2])] if the $p_\nu(x)$ are identical: $p_\nu(x) = p(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. In the general case of varying $p_\nu(x)$, a not-too-simple investigation leads to the following result:

The limit of the probability $q_n(x)$ of obtaining x as the sum of the results of n trials, tends, as $n \to \infty$ under the above conditions, to

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x) = \sum \psi(n_1, a_1)\, \psi(n_2, a_2) \ldots \psi(n_m, a_m), \tag{6}$$

where the sum is over all combinations of the integers $(\geqq 0)$ $n_1, n_2, \ldots, n_m$ *for which* $\sum_{\mu=1}^{m} \mu n_\mu = x$, *and the* a_μ *are defined by* (5).

Note that the expected value of x in (6) is small or moderate (since all chances for non-zero results tend to zero), and that all n_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, are $\leqq x$ since $\sum_{1}^{m} \mu n_\mu = x$. The main result expressed in (6) is that we have *proved* (not assumed, as often done) that, under quite general conditions, *rare events are mutually independent* (cf. p. 233). We do not enter into a discussion of the various applications of the theorem (6).

2. The result (6), although giving the answer to a natural and not unimportant question, seemed, at that time, rather disappointing to the author on account of the form of the right side of (6), compared to the case of n alternatives where the result for rare events is very concise, and to the "normal" case

[3]) The case where the positive abscissas of the jumps are not equally but rationally spaced can be reduced to the present one by a change of unit.

(all probabilities of the same order of magnitude) which leads under very general conditions to the simple and general Gaussian law. In the present little note we shall show that *the distribution to the right in* (6) *is a compound Poisson distribution*, a well-known distribution with remarkable properties and applications. We shall finally comment briefly on the more general problem of rare events mentioned previously.

3. The structure of the distribution on the right side of (6) becomes clearer if we investigate its generating function. With the a_μ and a of (5) we introduce

$$\alpha_\mu = \frac{a_\mu}{a}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m, \qquad \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = 1. \tag{7}$$

If the n original distributions $p_\nu(\mu)$ are identical and equal to $p(\mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$ then $\alpha_\mu = p(\mu)/[p(1) + \cdots + p(m)]$ is *the conditional probability of the "rare" result* μ *if we already know that some rare result has arisen.* In the general case, $p(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(\mu)$ is an average probability of the result μ and α_μ has a meaning similar to that above. Consider the functions

$$g(t) = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu t^\mu \tag{8}$$

and

$$h(t) = e^{-a[1-g(t)]}. \tag{9}$$

We wish to show that $h(t)$ is the generating function of $q(x)$. In fact, expanding the right side of (9) we obtain,

$$\begin{cases} h(t) = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} [g(t)]^k \\ \qquad = e^{-a} \left[1 + a(\alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m) + \frac{a^2}{2!} (\alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m)^2 + \cdots \right], \end{cases} \tag{10}$$

and rearranging

$$\begin{cases} h(t) = e^{-a} \left\{ 1 + a\alpha_1 t + \left[a\alpha_2 + \frac{a^2}{2!} \alpha_1^2 \right] t^2 + \left[a\alpha_3 + \frac{a^2}{2!} \cdot 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{a^3}{3!} \alpha_1^3 \right] t^3 + \right. \\ \qquad \left. + \left[a\alpha_4 + \frac{a^2}{2!} (2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2) + \frac{a^3}{3!} \cdot 3\alpha_1^2\alpha_2 + \frac{a^4}{4!} \alpha_1^4 \right] t^4 + \cdots \right\}. \end{cases} \tag{10'}$$

Here, in finding the coefficient of t^x, $x = 0, 1, 2, \ldots$ from (10), we proceed as follows: from the expansion of $a^k \cdot (\alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m)^k$ we pick those terms which are multiplied by t^x; each such term consists of exactly k factors[4]) (some of these terms may be zero, as, for example $\alpha_x = 0$ if $m < x$). The sum

[4]) The coefficient of t^x in the expansion of $(\alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m)^k$, where α_i is the probability of the result "i" and $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, is the probability of obtaining the sum x in k trials with probabilities $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

of all these terms for $k=1, 2, \ldots, x$ gives the coefficient of t^x in (10'). If in such a product of k factors a factor α_μ appears n_μ times, then, necessarily

$$(11) \qquad n_1+n_2+\cdots+n_m=k, \quad \text{and} \quad 1\,n_1+2n_2+\cdots+m\,n_m=x,$$

where $k=1, 2, \ldots, x$. It is thus seen that the law of formation of the coefficient of t^x from (10) is exactly the same as the summation rule given for the right side of (6) which stated that in (6) the sum was to be taken over those combinations of $n_1, n_2, \ldots, n_m$ for which $\sum_{\mu=1}^{m} \mu n_\mu = x$. Thus

$$(12) \qquad h(t)=\sum_{x=0}^{\infty} q(x)\, t^x.$$

We may now write $q(x)$, the limit probability of the sum x, given in (6), in the following way. We denote by $\{\alpha\}_x^{(k)}$ the coefficient of t^x in $(\alpha_1 t+\cdots+\alpha_m t^m)^k$, i.e., the convolution (Faltung) of the m constants $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ to the order k with sum of the subscripts equal to x. Then

$$(13) \qquad q(x)=e^{-a}\sum_{k=1}^{x}\frac{a^k}{k!}\cdot\{\alpha\}_x^{(k)}.$$

Of course, any $q_n(x)$ (probability of a sum x in n trials) is, per definition, a convolution, but a convolution of order n, where n may tend towards infinity. In Eq. (13), however, for $q(x)=\lim_{n\to\infty} q_n(x)$, k goes from 1 to x and x is finite, actually rather small in a problem of rare events. In the case of n identical distributions the interpretation of (13) is immediate. Let $1-\frac{a}{n}$ and $\frac{a}{n}$ be the probabilities of "zero" and "non-zero" (i.e. $1, 2, \ldots, m$) respectively, where "non-zero" corresponds to the rare events. Then $\left(\frac{a}{n}\right)^k\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k}$ is the probability that a certain group of k results (for example the first, second and k^{th}-one) are different from zero, while $(n-k)$ results are zero; and $\{\alpha\}_x^{(k)}$ is the probability that the sum of these k results, which we know to be different from zero, equals x. Now all groups of k variables out of n have the same $\left(\frac{a}{n}\right)^k\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k}$ and the same $\{\alpha\}_x^{(k)}$; hence, in order to take care of all possible groups of k variables out of n we have only to multiply by $\binom{n}{k}$. Finally, by the addition rule, the sum over k is to be taken so that

$$q_n(x)=\sum_{k=1}^{x}\left(\frac{a}{n}\right)^k\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k}\{\alpha\}_x^{(k)}.$$

Then in the limit $n\to\infty$ we obtain (13)[5]). If the n distributions $p_\nu(x)$ are not equal these simple considerations do not hold; the proof of (13) is then equivalent to that of the theorem of Sect. 1. The formulas (12) and (13) complete the result (6).

[5]) This proof differs from the one given in the paper, cit. [2]) for the case of identical distributions.

We give an alternative proof of (12). Write $h(t)$, given by (9) in the form

$$h(t) = e^{-a_1(1-t)} \cdot e^{-a_2(1-t^2)} \cdots \cdot e^{-a_m(1-t^m)} = h_1(t)\, h_2(t) \ldots h_m(t). \tag{9'}$$

Here

$$h_\mu(t) = e^{-a_\mu} \cdot e^{a_\mu t^\mu} = e^{-a_\mu}\left[1 + a_\mu t^\mu + \frac{a_\mu^2}{2!} t^{2\mu} + \cdots\right].$$

Thus, the probability $\varphi(z)$, $z = 0, \mu, 2\mu, \ldots$ whose generating function is $h_\mu(t)$ is given by

$$\varphi(\mu n_\mu) = \frac{a_\mu^{n_\mu}}{n_\mu!} e^{-a_\mu}, \qquad n_\mu = 0, 1, 2, \ldots; \tag{14}$$

it is the limit probability of obtaining n_μ times the result μ, or, of obtaining $z = \mu n_\mu$, in drawings from urns which contain only lots designated by either "0" or "μ", the latter being the rare event. On account of the theorem of the multiplication of generating functions it follows that $h(t) = h_1(t)\, h_2(t) \ldots h_m(t)$ is the generating function of the limit probability of the sum x obtained in $n \cdot m$ successive drawings from m groups of urns, where the first group contains only "zeros" and "ones", the next one only "zeros" and "twos", etc. That this probability *is* equal to the $q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x)$ of (6) (i.e. that the problem of Sect. 2. is such as if there were m groups of n independent alternatives) is the content of our theorem (6).

A probability distribution whose generating function is a function $h(t)$, as in (9), *is a compound Poisson distribution.* We review:

The probability $q_n(x)$ of obtaining the sum x in the general situation of rare events, described in Eqs. (3), (4), (5), *converges as $n \to \infty$ towards a compound Poisson distribution $q(x)$ whose generating function $h(t)$ is given by Eqs.* (8), (9) *with the α_μ defined by* (7). The distribution $q(x)$ is explicitly given by (6) and (13). Only for $m = 1$ this compound Poisson distribution reduces to the right side of (1).

By means of (12) we find easily mean value $\bar{x}$ and variance s^2 of $q(x)$. In the usual way we compute $h'(1)$ and $h''(1)$ from (9), and find

$$\bar{x} = h'(1) = a\, g'(1), \qquad s^2 = h''(1) + h'(1) - [h'(1)]^2 = a[g''(1) + g'(1)];$$

thus, with $g(t)$ given by (8),

$$\bar{x} = a \sum_{\mu=1}^{m} \mu\, \alpha_\mu = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu, \qquad s^2 = a \sum_{1}^{m} \mu^2\, \alpha_\mu = \sum_{1}^{m} \mu^2\, a_\mu. \tag{15}$$

Hence for $m > 1$, the variance of $q(x)$ is always greater than the mean value, in contrast to the simple Poisson distribution where both are equal. Thus, if in a statistics which suggests a sum of rare events the observed variance is found to be appreciably greater than the mean one may try the hypothesis that the basic component distributions are not alternatives but $(m+1)$-valued distributions, $m > 1$.

4. In this paper the n distributions introduced in Sect. 2 were arith metical distributions with a finite number of non-negative labels $0, 1, 2, \ldots, m$ If, even in the case of arithmetical distributions $P_\nu(x)$, negative labels are admitted, the situation changes considerably: take, for example, equal distributions $P_\nu(x) = P(x)$ with jumps only at the three points $-1, 0, 1$, ($p(0)$ the "large" probability). We denote by $q_n(n_1, n_2)$ the probability of obtaining in n trials n_1-times "1", n_2-times "-1", $n_0 = (n - n_1 - n_2)$-times "0". It is easily seen that with $a_1 = n p(1)$, $a_2 = n p(-1)$, $a = a_1 + a_2$ we obtain as before,

$$\lim_{n \to \infty} q_n(n_1, n_2) = \psi(n_1, a_1)\, \psi(n_2, a_2).$$

But the summation, by means of which in (6) the $q(x)$ is derived from the product of the ψ's, is now unsatisfactory since $q(x)$ is a sum of the infinitely many products for which $n_1 - n_2 = x$. Likewise, in a formula corresponding to (13) the summation will go in the general case from $k = 1$ to ∞ so that convolutions of any order occur. The generating function is still a compound Poisson distribution.

Division of Engineering and Applied Physics,
Harvard University, Cambridge 38, Mass. (U.S.A.)

(Eingegangen am 20. April 1959)

Hölder, E.
Math. Zeitschr. 72, 235–258 (1960)

Extremale geschlossene Differentialformen

Unterschallströmungen im Großen

Leon Lichtenstein zum Gedächtnis

Von

Ernst Hölder

Die Methode der schrittweisen Fortsetzung nach einem Parameter liefert bei der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung eines regulären Variationsproblems unter Umständen, nämlich beim Vorhandensein von apriori-Schranken, einen Existenzsatz im Großen, gestattet also etwa in einem mehrfach zusammenhängenden ebenen Bereich eine Gasströmung bei Vergrößerung der Durchflüsse mathematisch solange zu verfolgen, bis die Geschwindigkeit w an einer Stelle die örtliche Schallgeschwindigkeit c bis auf ein festes $\varepsilon > 0$ erreicht: $w > c - \varepsilon$.

Die Methode stammt von S. Bernstein [5], Schauder und Leray [7]; die Anwendung auf die Gasdynamik, die auf Sätzen der Potentialtheorie und der partiellen elliptischen Differentialgleichungen von Lichtenstein [4] beruhen, habe ich im Jahre 1943 im III. Teil einer nicht veröffentlichten Lilienthal-Preisarbeit gemacht. Diesen reproduziere ich im II. Abschnitt der vorliegenden Abhandlung. Das sachliche Resultat, die Gewinnung von Unterschallströmungen im Großen, ist nach dem Kriege von Shiffman [13] unmittelbar aus dem Variationsprinzip, das zu einem überall positiv regulären abgeändert wird, erbracht worden. Ich glaube, heute führte auch die Methode von Beckert [22] zum Ziel, bei der sich die harmonische Differentialform der inkompressiblen Strömung als Ausgangslösung darbietet; sie gehört zu einem abgeänderten Variationsproblem mit Zusatzfunktion, diese versieht man mit einem Parameter λ, den man von $\lambda = 1$ zu $\lambda = 0$ abnehmen läßt.

Wenn ich den damals von mir behandelten Fall noch vorlege, so ist selbstverständlich, daß ich die Priorität Shiffmans anerkenne, der ja auch weitergeht betr. eines ins Unendliche sich erstreckenden Strömungsgebiets um eine Kontur mit Ecke. Dasselbe gilt bezüglich der Untersuchungen von Bers [25]; auf Nirenbergs [14] neuartige Wendung bei der apriori-Abschätzung komme ich noch zurück.

Als neuen Beitrag bringt der I. Abschnitt der vorliegenden Arbeit die Anwendung der Fortsetzungsmethode auf „Strömungsfelder“ auf einer geschlossenen Fläche endlichen Geschlechts, also Bildungen, die man „quasianalytische“ Differentiale 1. Gattung nennen mag. Diese und die damit zusammenhängenden fastkonformen Abbildungen wurden in letzter Zeit mehrfach studiert, außer von Bers [21], S. Bergmann [20] und

AHLFORS [30] von R. NEVANLINNA, LAVRENTIEFF, DANYLUK, SCHABAT, VEKUA u. a. in den Vorträgen auf dem Internationalen Colloquium über Funktionentheorie, Helsinki 1957 [26]. Dort habe ich [19] den Aufbau dieser Differentiale aus den klassischen Abelschen Differentialen 1. und 3. Gattung auf der zu einer Riemannschen Fläche R gemachten geschlossenen Fläche angegeben; die Herleitung dieser Darstellungsformel, unten (2.17), für geschlossene Differentiale, die auf R überall regulär sind, soll hier gebracht werden. Sie beruht auf einer Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel, (1.22), für analytische Funktionen, wie sie ähnlich auch bei HERGLOTZ [27], BOCHNER [17], CARLEMAN [23], NEVANLINNA [18] vorkommt. Hierein werden die Abelschen Integrale eingesezt in der Normierung, die WEYL [15] in der als abschließend zu betrachtenden Darstellung der 3. Auflage seiner „Idee der Riemannschen Fläche" gibt.

Für etwaige Verallgemeinerungen auf Flächen mit Rändern käme in Betracht die mit der Weylschen Methode der orthogonalen Projektion im Raume der Differentialformen arbeitende Darstellung von SCHIFFER-SPENCER, Functionals of finite Riemann Surfaces [16].

Bezüglich der Gewinnung von apriori-Abschätzungen, welche die Fortsetzungsmethode erfordert, sei noch auf die neue Behandlungsart nach MORREY [12] und NIRENBERG [14] hingewiesen, die sich vielleicht sogar auf höhere Dimensionen ausdehnen läßt. Diese benutzt 1. die quasikonforme Abbildung der x, y-Ebene in die P, Q-Hodographenebene, 2. eine daraus folgende Abschätzung für ein modifiziertes Dirichletintegral und 3. die daraus folgende H-Bedingung für die Geschwindigkeit. Die Einzelausführung verliefe wie im II. Abschnitt, wo mit den älteren Abschätzungen von S. BERNSTEIN in einem mehrfach zusammenhängenden berandeten schlichten Strömungsbereich der Existenzbeweis der Strömungen im Großen dargestellt wird.

I. Extremale geschlossene Differentiale

1. Es sei R eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$. Eine invariante reelle Differentialform

$$\pi = p\,dx + q\,dy \tag{1.1}$$

auf R heißt geschlossen (oder integrabel), falls π in C' enthalten ist und das äußere Differential

$$d\pi \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 \tag{1.2}$$

ist. $z = x + iy$ ist dabei lokaler Parameter. Die Tatsache, daß π geschlossen ist, soll symbolisch durch

$$\pi \to 0 \tag{1.3}$$

bezeichnet werden. Sind $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ zwei homologe eindimensionale Zyklen der Riemannschen Fläche R, so gilt für jede beliebige geschlossene Differentialform π auf R die Beziehung

$$\int_{\mathfrak{z}_1} \pi = \int_{\mathfrak{z}_2} \pi, \tag{1.4}$$

weil es einen Bereich V gibt, dessen Rand ∂V gleich $\beta_1 - \beta_2$ ist, und nach STOKES das Integral

$$\int_{\partial V} \pi = \int_V d\pi, \tag{1.5}$$

also wegen (1.3) Null ist.

π heißt exakt (oder total), falls $\pi \to 0$ und auf R eine in C'' enthaltene Funktion ψ existiert, so daß

$$\pi = d\psi \tag{1.6}$$

ist. $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^p, \Gamma'^1, \ldots, \Gamma'^p$ sei eine kanonische Homologiebasis der Riemannschen Fläche R, und zwar überkreuze Γ'^ν die Kurve Γ^ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ von rechts nach links. $\Gamma^1 + \Gamma'^1, \ldots, \Gamma^p + \Gamma'^p$ liefert eine kanonische Zerschneidung von R in ein einfach zusammenhängendes Polygon R'.

$$\int_{\Gamma^\nu} \pi = \gamma_\nu \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma'^\nu} \pi = \gamma'_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, p) \tag{1.7}$$

sind die Perioden von π. Für eine geschlossene Differentialform π, deren sämtliche Perioden verschwinden, ergibt sich

$$\int_{P_0}^{P} \pi = \varphi(P) \tag{1.8}$$

als eine auf R eindeutige Funktion. In diesem Falle ist π exakt.

Eine invariante Differentialform π aus C' heißt harmonisch, falls

$$d\pi = 0 \quad \text{und} \quad d^*\pi = 0 \tag{1.9}$$

ist. Mit $^*\pi$ wird dabei die zu π duale Form bezeichnet, d. h. es gilt in den auf der Riemannschen Fläche R konform-zulässigen Parametern

$$^*\pi = -q\,dx + p\,dy. \tag{1.10}$$

Allgemeiner ist in beliebigen Koordinaten (t^1, t^2) und bei einer Metrik

$$ds^2 = g_{ij}\,dt^i\,dt^j \tag{1.11}$$

mit

$$g = \det(g_{ij}), \qquad (\varepsilon_{i\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (p_k) = (p, q)$$

zu $\pi = p_k\,dt^k$ dual

$$^*\pi = \sqrt{g}\,g^{ik}\,p_k\,\varepsilon_{i\alpha}\,dt^\alpha. \tag{1.12}$$

Man erhält

$$^{**}\pi = -\pi. \tag{1.13}$$

Ist π harmonisch, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \tag{1.14}$$

und es existiert eine im Kleinen eindeutige analytische Funktion $f(z)$, so daß

$$\begin{cases} \varpi = \pi + i\,{}^*\pi = p\,dx + q\,dy + i\,(-q\,dx + p\,dy) \\ \quad = (p - i\,q)\,(dx + i\,dy) = f'(z)\,dz = df \end{cases} \tag{1.15}$$

ist. Es gilt dann und nur dann

$$\pi = \Re\, df = d\psi; \tag{1.16}$$

ψ ist eine harmonische Funktion.

Es sei nun

$$g = \psi - i\,\varphi \tag{1.17}$$

eine analytische Funktion auf R und

$$dg = \eta + i\,{}^*\eta, \qquad \eta,\ {}^*\eta \text{ reell}, \tag{1.18}$$

ihr Differential. ${}^*\eta$ ist dann die zu η duale Differentialform, und umgekehrt, wenn dies bei (1.18) gilt, ist wegen $d\,dg = 0$ die Form η harmonisch und die Funktion g gemäß (1.15) analytisch. B sei ein Gebiet der Riemannschen Fläche R und ∂B dessen Rand. Es gilt mit beliebigem π die Stokessche Integralumwandlungsformel

$$\int_{\partial B} g\,\varpi = \int_B g\,d\varpi + dg \wedge \varpi. \tag{1.19}$$

Da

$$\eta \wedge \pi = {}^*\eta \wedge {}^*\pi \quad \text{und} \quad \eta \wedge {}^*\pi = \pi \wedge {}^*\eta \tag{1.20}$$

ist, folgt

$$dg \wedge \varpi = \eta \wedge \pi - {}^*\eta \wedge {}^*\pi + i({}^*\eta \wedge \pi + \eta \wedge {}^*\pi) = 0, \tag{1.21}$$

und man erhält [24] daher als Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes

$$\int_{\partial B} g\,\varpi = \int_B g\,d\varpi. \tag{1.22}$$

2. Diese Gleichung verwenden wir zur Ableitung einer von uns benötigten Darstellungsformel für eine *geschlossene* Differentialform π. Wir benutzen dabei die längs Γ^ν, Γ'^ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ aufgeschnittene Fläche R, d. h. das Polygon R', aus dem wir außerdem noch eine kleine Kreisscheibe k mit (positiv durchlaufenen) Peripherie c und dem Radius ϱ um einen Pol P_0 von g herausschneiden. Es ergibt sich

$$\int_c g\,\varpi = \int_{\partial R'} g\,\varpi - \int_{R'-k} g\,d\varpi. \tag{2.1}$$

Für g verwenden wir das Abelsche Integral 2. Gattung

$$\tau_{P_0}(z) = \int_{P_1}^{P} d\tau_{P_0} = \psi_{P_0}(z) - i\,\varphi_{P_0}(z) \tag{2.2}$$

bzw.

$$\tau'_{P_0}(z) = \int_{P_1}^{P} d\tau'_{P_0} = \psi'_{P_0}(z) - i\,\varphi'_{P_0}(z) \tag{2.2'}$$

mit dem Argument z und dem Pol P_0 in der Bezeichnung und Normierung von WEYL [15], S. 104; allerdings ist $\tau'_{P_0}(z)$ mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen, wie es in der 1. Auflage S. 108 richtig stand. Dabei sei P_1 ein beliebiger von P_0 verschiedener Punkt von R. $\tau_{P_0}(z)$ bzw. $\tau'_{P_0}(z)$ hat in P_0 einen Pol 1. Ordnung; sie verhalten sich wie $\frac{1}{z}$ bzw. $\frac{1}{iz}$. Die Differentiale

(2.3) $$d\tau_{P_0} = d\psi_{P_0} - i\,d\varphi_{P_0} \quad \text{und} \quad d\tau'_{P_0} = d\psi'_{P_0} - i\,d\varphi'_{P_0}$$

sind Abelsche Elementardifferentiale 2. Gattung. Für jede geschlossene Kurve Γ gilt

(2.4) $$\Re \int_\Gamma d\tau_{P_0} = 0 \quad \text{sowie} \quad \Re \int_\Gamma d\tau'_{P_0} = 0,$$

die Perioden von $d\tau_{P_0}$ und $d\tau'_{P_0}$ sind also rein imaginär. Indem man zuerst

(2.5) $$g = \tau_{P_0}(z)$$

setzt und berücksichtigt, daß π geschlossen sein soll, daß also

(2.6) $$d\varpi = i\,d^*\pi$$

ist, erhält man die Gleichung

(2.7) $$\int_c \tau_{P_0}(p - iq)\,dz = \int_{\partial \bar{R}'} \tau_{P_0}\varpi - i \int_{R'-k} (\psi_{P_0} - i\varphi_{P_0})\,d^*\pi.$$

Wegen $p - iq = p_0 - iq_0 + \delta$, $\delta \to 0$ mit $\varrho \to 0$, ist

(2.8) $$\int_c \tau_{P_0}(p - iq)\,dz = (p_0 - iq_0) \int_c \left(\frac{1}{z - z_0} + \mathfrak{P}(z) \right) dz + J \to 2\pi i (p_0 - iq_0),$$

da

$$J = \int_c \delta \cdot \tau_{P_0} dz \to 0 \quad \text{mit} \quad \varrho \to 0$$

geht. Da außerdem

(2.9) $$\left\{ \begin{aligned} \int_{\partial \bar{R}'} \left(\int_{P_1}^{P} d\tau_{P_0} \right) \varpi &= \sum_\nu \int_{-\Gamma'_\nu} \left(\int_{\Gamma'_\nu} d\tau_{P_0} \right) \varpi - \sum_\nu \int_{-\Gamma''_\nu} \left(\int_{\Gamma''_\nu} d\tau_{P_0} \right) \varpi \\ &= i \sum_\nu \left(\Im \int_{\Gamma'_\nu} d\tau_{P_0} \right) \int_{\Gamma''_\nu} \varpi - i \sum_\nu \left(\Im \int_{\Gamma''_\nu} d\tau_{P_0} \right) \int_{\Gamma'_\nu} \varpi \end{aligned} \right.$$

ist, folgt

(2.10) $$\left\{ \begin{aligned} 2\pi i (p_0 - iq_0) = i \sum_\nu \left(\Im \int_{\Gamma'_\nu} d\tau_{P_0} \right) \int_{\Gamma''_\nu} \varpi - i \sum_\nu \left(\Im \int_{\Gamma''_\nu} d\tau_{P_0} \right) \int_{\Gamma'_\nu} \varpi - \\ - i \int_{R'-k} (\psi_{P_0} - i\varphi_{P_0})\,d^*\pi. \end{aligned} \right.$$

Aus dieser Relation ergibt sich die Gleichung mit (1.7)

(2.11) $$2\pi p_0 = 2\pi p(P_0) = \sum_\nu \left[\gamma'_\nu \Im \int_{\Gamma'_\nu} d\tau_{P_0} - \gamma_\nu \Im \int_{\Gamma''_\nu} d\tau_{P_0} \right] - \int_{\bar{R}'} \psi_{P_0} d^*\pi.$$

Wenn man

(2.5)′ $$g = \tau'_{P_0}$$

setzt, erhält man auf analoge Weise die Beziehung

(2.12) $$-2\pi q_0 = \sum_\nu \left[\gamma'_\nu \Im \int_{\Gamma'_\nu} d\tau'_{P_0} - \gamma_\nu \Im \int_{\Gamma''_\nu} d\tau'_{P_0} \right] - \int_{\bar{R}'} \psi'_{P_0} d^*\pi.$$

(2.11) und (2.12) führen zu

$$(2.13)\quad \begin{cases} 2\pi(p_0 - i\,q_0) = \sum\limits_{\nu} \left[\gamma'_\nu \left(\Im \int\limits_{\Gamma^\nu} d\tau_{P_0} + i\,\Im \int\limits_{\Gamma^\nu} d\tau'_{P_0}\right) - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \gamma_\nu \left(\Im \int\limits_{\Gamma'^\nu} d\tau_{P_0} + i\,\Im \int\limits_{\Gamma'^\nu} d\tau'_{P_0}\right)\right] - \int\limits_{R'} (\psi_{P_0} + i\,\psi'_{P_0})\, d^*\pi. \end{cases}$$

Nach WEYL [15], S. 113 gilt

$$(2.14)\quad \Re \int\limits_{P_1}^{P} d\tau_{P_0}(z) + i\,\Re \int\limits_{P_1}^{P} d\tau'_{P_0}(z) = \psi_{P_0} + i\,\psi'_{P_0} = -2\pi \frac{d\omega_{P_1 P}(z_0)}{dz_0}$$

und für jeden geschlossenen Weg α

$$(2.15)\quad \Im \int\limits_{\alpha} d\tau_{P_0} + i\,\Im \int\limits_{\alpha} d\tau'_{P_0} = -2\pi \frac{dw_\alpha(z_0)}{dz_0}$$

Dabei ist $d\omega_{P_1 P}$ das Elementardifferential 3. Gattung, das nur in P_1 und P Pole 1. Ordnung mit den Residuen $-i$ bzw. i besitzt, außerdem rein imaginäre Perioden hat, und dw_α das nach WEYL [15], S. 107 dem Weg α zugeordnete Abelsche Differential 1. Gattung. $d\omega_{P_1 P}$ ist gleich Null, wenn $P_1 = P$ ist. Unter Verwendung der Bezeichnungen

$$(2.16)\quad dw'_\nu = dw_{\Gamma'^\nu} \quad \text{und} \quad dw_\nu = dw_{\Gamma^\nu}$$

folgt aus (2.13) wegen (1.15) die Gleichung

$$(2.17)\quad \pi_0 + i^*\pi_0 = \sum_{\nu} \left[\gamma_\nu\, dw'_\nu(z_0) - \gamma'_\nu\, dw_\nu(z_0)\right] + \int\limits_{R} d\omega_{P_1 P}(z_0)\, d^*\pi,$$

d bezieht sich hier auf das Argument z_0, Integrationsgebiet ist wieder R, und aus dieser

$$(2.18)\quad \pi_0 = \sum_{\nu} \left[\gamma_\nu\, \Re\, dw'_\nu(z_0) - \gamma'_\nu\, \Re\, dw_\nu(z_0)\right] + \Re \int\limits_{R} d\omega_{P_1 P}(z_0)\, d^*\pi.$$

Durch analoge Betrachtungen ergibt sich, daß (2.18) auch dann gilt, wenn P_0 ein Randpunkt von R' ist.

Aus (2.18) erhält man durch Integration längs Γ^μ die Beziehung

$$(2.19)\quad \int\limits_{\Gamma^\mu} \pi = \sum_{\nu} \left[\gamma_\nu\, \Re \int\limits_{\Gamma^\mu} dw'_\nu - \gamma'_\nu\, \Re \int\limits_{\Gamma^\mu} dw_\nu\right] + \int\limits_{R} \left(\Re \int\limits_{\Gamma^\mu} d\omega_{P_1 \underline{P}}\right) \underline{d}^*\underline{\pi}.$$

Da Γ^μ geschlossen ist, folgt nach WEYL [15], S. 105

$$(2.20)\quad \Re \int\limits_{\Gamma^\mu} d\omega_{P_1 \underline{P}}(z) = 0.$$

Der Realteil des Integrales $\int\limits_{\beta} dw_\alpha$ für zwei geschlossene Wege α und β ergibt nach WEYL, S. 107, die Schnittzahl $ch(\beta, \alpha)$ dieser Wege:

$$(2.21)\quad \Re \int\limits_{\beta} dw_\alpha = ch(\beta, \alpha).$$

Die Schnittzahl $ch(\beta, \alpha)$ ist die algebraische Summe der Überkreuzungen von β und α, wobei im Falle, daß β die Kurve α von links nach rechts überkreuzt

diese Überkreuzung mit $+1$ und im entgegengesetzten Fall mit -1 in Anschlag zu bringen ist. Es ist

$$\Re \int_{\Gamma'_\nu} dw_\nu = -1 \quad \text{und} \quad \Re \int_{\Gamma'_\nu} dw'_\nu = +1 \qquad (\nu = 1, \ldots, p) \tag{2.22}$$

und in allen anderen Fällen bei der Integration längs Γ'_μ oder Γ''_μ

$$\Re \int dw_\nu = 0 \quad \text{und} \quad \Re \int dw'_\nu = 0 \tag{2.23}$$

Also hat eine Lösung π von (2.17) als Perioden gerade die Parameter γ_ν, γ'_ν.

(2.17) ist eine Darstellungsformel für eine geschlossene Differentialform π, vgl. [*19*] Formel (*), wo aber das Integral das positive Vorzeichen haben muß, da entgegen dem Zitat die 3. Auflage von WEYL [*15*] benutzt ist. Da nach [*15*] $d\omega_{P_1 \underline{P}}(z)$ sich nur in P_1 und $\underline{P}$ singulär wie $-\frac{dz'}{2\pi z'}$ bzw. $\frac{dz}{2\pi z}$ verhält, ist umgekehrt (2.18) ein geschlossenes Differential π, für welches tatsächlich $d^*\pi$ den auf der rechten Seite im Flächenintegral stehenden Wert hat. Man kann daran denken, (2.17) zur Konstruktion eines „extremalen" geschlossenen Differentials π mit den gegebenen Perioden γ_ν, γ'_ν zu verwenden. Die Konstruktion eines solchen geschlossenen Differentials mit gegebenen Perioden kann zunächst im Kleinen geschehen.

3. Die duale Differentialform $^*\pi$ soll einer nichtlinearen Differentialgleichung (3.8) genügen; diese entspringe aus einem regulären Extremalintegral

$$\int_B F(x, y, P, Q)\, dx\, dy \to \text{Min}. \tag{3.1}$$

Dies ist allerdings nur lokal, in einem genügend kleinen einfach zusammenhängenden Gebiet B zu stellen, bei vorgegebenen z-Werten auf dem Rand ∂B, um die Differentialgleichung zu bekommen. Global würde die Funktion z, von der in (3.1) nur die Ableitungen $P = \partial z/\partial x$, $Q = \partial z/\partial y$ eingehen, nur als mehrwertige Funktion existieren. Wir betrachten nun dieses „Strömungsfeld" P, Q in einer zweidimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit M ohne Rand und suchen, zunächst beim Problem im Kleinen, in der Nachbarschaft eines gegebenen λ-stetigen Lösungsfeldes P^0, Q^0 ein neues

$$P = P^0 + p, \qquad Q = Q^0 + q. \tag{3.2}$$

Geschlossen ist dann außer $\pi = p\,dx + q\,dy$ noch die Differentialform

$$\begin{aligned} F_P\, dy - F_Q\, dx = {} & F^0_P\, dy - F^0_Q\, dx + (F^0_{PP}\, p + F^0_{PQ}\, q)\, dy - \\ & - (F^0_{QP}\, p + F^0_{QQ}\, q)\, dx + \Theta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Differentialform $\Theta = \Theta_1 dx + \Theta_2 dy$ enthält in ihren Koeffizienten p, q in 2. und höherer Ordnung.

Zur geschlossenen Differentialform

$$\pi = p\,dx + q\,dy$$

gehört

$$^*\pi = -\frac{F^0_{PP}\, p + F^0_{PQ}\, q}{\sqrt{\Delta^0}}\, dy - \frac{F^0_{QP}\, p + F^0_{QQ}\, q}{\sqrt{\Delta^0}}\, dx = \sqrt{g}\, g^{ik} p_k\, \varepsilon_{i\alpha}\, dx^\alpha \tag{3.5}$$

als duale im Sinne von HODGE mit dem regulären Maßtensor

$$(3.6)\qquad (g^{ik}) = \begin{pmatrix} F^0_{P\,P} & F^0_{P\,Q} \\ F^0_{Q\,P} & F^0_{Q\,Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 & b^0 \\ b^0 & c^0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{g} = \det(g^{ik}) = F^0_{P\,P} F^0_{Q\,Q} - F^0_{P\,Q} = \Delta^0.$$

Die Metrik geht in die Definition der dualen Differentialform beim Grade $p=1$ in einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit nur mit ihren *konformen* Eigenschaften ein. Man kann nach LICHTENSTEIN [28] M mit Umgebungen überdecken, die sich [mit der Metrik (3.6) ausgestattet] *konform* auf Parameter-Kreisscheiben abbilden lassen; so wird M zur Riemannschen Fläche R, auf der die Abelschen Differentiale existieren und die Betrachtungen von Nr. 1 und 2 gelten; vgl. auch A. WINTNER [29].

Es ist jetzt

$$(3.7)\qquad 0 = d\left(\frac{*\pi}{\sqrt{g}} + \Theta\right) = \frac{d*\pi}{\sqrt{g}} + d\frac{1}{\sqrt{g}} \wedge *\pi + d\Theta,$$

also

$$(3.8)\qquad d*\pi = -\frac{1}{1/\sqrt{g}}\, d\frac{1}{\sqrt{g}} \wedge *\pi - \sqrt{g}\, d\Theta = d\ln\sqrt{g} \wedge *\pi + d\sqrt{g} \wedge \Theta - d\left(\sqrt{g}\,\Theta\right).$$

Meine Darstellungsformel (2.17) gibt daher mit einer Produktintegration, vgl. auch [19], und der Bezeichnung $\Theta(P_0) = \Theta_1(P_0)\,dx + \Theta_2(P_0)\,dy$

$$(3.9)\qquad \begin{cases} \pi_0 + i*\pi_0 = \sum \gamma'_\nu d_0 w_\nu(P_0) - \gamma_\nu d_0 w'_\nu(P_0) + \int\limits_R d_0\omega_{P_1 P}(P_0)\, d\ln\sqrt{g} \wedge *\pi + \\ \quad + \int\limits_R d\, d_0\omega_{P_1 P}(P_0) \wedge \left(\sqrt{g}\,\Theta - \sqrt{g_0}\,\Theta(P_0)\right) + \int\limits_R d_0\omega_{P_1 P}(P_0)\, d\sqrt{g} \wedge \Theta. \end{cases}$$

Wir schreiben jetzt deutlicher d_0 für das Differential bez. P_0. Also kommt die nichtlineare Integralgleichung

$$(3.10)\qquad \begin{cases} \pi_0 + i*\pi_0 - \int\limits_R d_0\omega_{P_1 P}(P_0)\, d\ln\sqrt{g} \wedge *\pi = \sum \gamma'_\nu\, d_0 w_\nu(P_0) - \\ \qquad - \gamma_\nu\, d_0 w'_\nu(P_0) + \int\limits_R d\, d_0\omega_{P_1 P}(P_0) \wedge \left(\sqrt{g}\,\Theta(P) - \sqrt{g_0}\,\Theta(P_0)\right) + \\ \qquad + \int\limits_R d_0\omega_{P_1 P}(P_0)\, d\sqrt{g} \wedge \Theta. \end{cases}$$

Die linke Seite, gleich Null oder gleich einer gegebenen Funktion gesetzt, ist eine der Fredholmschen Theorie zugängliche lineare Integralgleichung. Ihr Kern ist nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie vollstetig. Die homogene Gleichung

$$(3.11)\qquad \pi_0 + i*\pi_0 - \int\limits_R d_0\omega_{P_1 P}(P_0)\, d\ln\sqrt{g} \wedge *\pi = 0$$

hat keine nichttriviale Lösung.

Sonst hätte ja das lineare System

$$(3.12)\qquad \left\{\begin{array}{l} d\pi = 0 \\ d*\pi = d\ln\sqrt{g} \wedge *\pi \end{array}\right\}, \text{ d.h. } \left\{\begin{array}{l} \pi \to 0 \\ \dfrac{*\pi}{\sqrt{g}} \to 0 \end{array}\right.$$

eine Lösung ohne alle Perioden. Es wäre also nach (1.8)

$$\pi = d\zeta \tag{3.13}$$

exakt mit einer auf ganz R eindeutigen Funktion ζ, die der Gleichung

$$d' \frac{d\zeta}{\sqrt{g}} = 0 \quad \text{mit} \quad d' = -\,{}_*d^* \quad \text{auf} \quad R \tag{3.14}$$

($_*$ unten ist der Übergang von der Differentialform 2. Grades zur dualen 0.Grades) genügt. Integriert, mit $(\zeta, \zeta) = \int_R \zeta \wedge {}^*\zeta$, ${}^*\zeta = \sqrt{g}\,\zeta\, dt^1 dt^2$, $(\pi, \pi) = \int_R \pi \wedge {}^*\pi$,

$$\left(\zeta, d' \frac{d\zeta}{\sqrt{g}}\right) = \left(d\zeta, \frac{d\zeta}{\sqrt{g}}\right) = 0;$$

das hätte aber wegen der Definitheit der im Integranden stehenden quadratischen Form $d\zeta = 0$ zur Folge, also $\pi = 0$.

Es existiert also der lösende Kern $N(P_0, P)$ zu $d_0 \omega_{P_1 P}(P_0)\, d \ln \sqrt{g}$, und wir bekommen für $(p_\alpha) = (p, q)$

$$p_\alpha = \sum_{\nu=1}^{p} \gamma'_\nu\, u_\alpha^{(\nu)} - \gamma_\nu u_\alpha'^{(\nu)} + F\{p_\beta\} \tag{3.15}$$

mit gewissen aus N und dw_ν, dw'_ν gebildeten Funktionen $u_\alpha^{(\nu)}$, $u_\alpha'^{(\nu)}$, wo $F\{p_\beta\}$ ein Funktional von 2. und höherem Grade in p_β ist.

Für

$$|\gamma_\nu|, |\gamma'_\nu| \leqq \Omega_1 \tag{3.16}$$

und H-Quotienten $1+\lambda$-ter Ordnung

$$|\pi|_{1+\lambda} \leqq \Omega |dz|; \quad |\dot{\pi}|_{1+\lambda} \leqq \Omega |dz|, \quad |\pi - \dot{\pi}|_{1+\lambda} \leqq V |dz| \tag{3.17}$$

gilt die Abschätzung

$$|F|_{1+\lambda} \leqq A\,\Omega^2, \quad |F - \dot{F}|_{1+\lambda} \leqq B\,\Omega\, V. \tag{3.18}$$

Die Funktionalgleichung (3.10) kann man mit den Methoden von Lichtenstein [4] auflösen. Es gilt für die gegebenen analytischen Differentiale

$$\begin{cases} |dw_\nu|_{1+\lambda}, \quad |dw'_\nu|_{1+\lambda} \leqq C_1 |dz|, \quad \text{ebenso} \quad |u_\alpha^{(\nu)}|_{1+\lambda}, \quad |u_\alpha'^{(\nu)}|_{1+\lambda} \leqq C_2 \\ \qquad\qquad |d \ln \sqrt{g}|_\lambda \leqq C_3 |dz|. \end{cases} \tag{3.19}$$

Es entsteht nun das Problem im Großen, die Lösung schrittweise nach den Parametern γ_ν, γ'_ν fortzusetzen, solange das Problem vom elliptischen Typus ist. Das geht bei Kenntnis von apriori-Schranken; dies ist die Methode von S. Bernstein, Schauder und Leray, die im II. Abschnitt am Problem der Gasströmung in einem *ebenen* ringförmigen Kanal dargestellt wird. Heute folgen die dabei nötigen apriori-Abschätzungen einfacher als mit den Methoden von S. Bernstein nach Nirenberg [14] mittels der Ungleichheit

$$P_x^2 + P_y^2 + Q_x^2 + Q_y^2 \leqq k(P_y Q_x - P_x Q_y)$$

der quasikonformen Abbildung von x, y auf P, Q, und nach MORREY [11], [12] mittels der Abschätzung eines modifizierten Dirichletintegrals der Form

$$\int r^{-\lambda}(P_x^2 + P_y^2 + Q_x^2 + Q_y^2)\, dx\, dy \leqq M, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

und der daraus folgenden H-Bedingung für P, Q

$$|P' - P|/r^{\lambda} \leqq H, \ldots .$$

Man zeigt so, daß die Normen $|P^0|_\lambda$, $|Q^0|_\lambda$ nur von der ein für allemal vorgegebenen Schranke b_0,

$$|P^0|, |Q^0| \leqq b_0, \tag{3.20}$$

abhängen. Daß dann auch die Ableitungen Ungleichheiten

$$|P_x^0|_\lambda, \ldots, |Q_y^0|_\lambda \leqq C(b_0) \tag{3.21}$$

genügen, folgt nach SCHAUDER [6] bzw. NIRENBERG [14].

Daraus folgen auch apriori-Schranken für $|d \ln \sqrt{g}|_\lambda$.

4. Beim Variationsproblem der ebenen Gasdynamik, für das die Fortsetzungsmethode in einem ebenen Gebiet T mit Rand in der alten Weise im II. Abschnitt ausgeführt wird, ergibt sich die Grundfunktion

$$F(P, Q) = G(P^2 + Q^2) = \mathfrak{p} + \varrho(u^2 + v^2) \quad (= \text{Impulsdichte}) \tag{4.1}$$

nach [10] (4.6) aus dem Mollierdiagramm für den Druck $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\mathfrak{i}, s_0)$, $s_0 = \text{const}$, und der Dichte $\varrho = \mathfrak{p}_\mathfrak{i} \geqq \varrho_0 > 0$, wenn wir den aus der Bernoullischen Gleichung folgenden Ausdruck der Enthalpie $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_0 - \frac{w^2}{2}$, $\mathfrak{i}_0 = \text{const}$, einsetzen und schließlich aus

$$\varrho u = Q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \varrho v = -P = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{p}_\mathfrak{i}^2 w^2 = \varpi^2 \tag{4.2}$$

das Quadrat $w^2 = u^2 + v^2$ der Geschwindigkeit $w > 0$ durch das Quadrat $\varpi^2 = P^2 + Q^2$ der Stromstärke $\varpi > 0$ ausdrücken.

Man setzt ein Gas voraus, bei dem die Impulsdichte $G = \mathfrak{p} + 2(\mathfrak{i}_0 - \mathfrak{i})\mathfrak{p}_\mathfrak{i}$ eine konvexe Funktion der Enthalpie $\mathfrak{i}$ ist, die für $\mathfrak{i}_* = \mathfrak{i}_0 - \frac{1}{2}c_*^2$ ein Maximum besitzt. An der Stelle $w = c_*$ ist

$$\frac{dG}{d\mathfrak{i}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} \cdot 2(\mathfrak{i}_0 - \mathfrak{i}) - \mathfrak{p}_\mathfrak{i} = 0, \quad \text{d. h.} \quad w^2 = \frac{\mathfrak{p}_\mathfrak{i}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}} = c^2 \tag{4.3}$$

(Quadrat der Schallgeschwindigkeit),

und wegen unserer Annahme $\frac{d^2G}{d\mathfrak{i}^2} < 0$ gilt: Wenn w die Intervalle $\langle 0, c_* \rangle$ und weiter $(c_*, +\infty)$ durchläuft, so durchläuft G monoton wachsend $\langle 0, b_* \rangle$ wieder und zurück, monoton abnehmend.

Ich betrachte nur den 1. Zweig über $\langle 0, c_* \rangle$ des Variationsproblems (4.1), die Unterschallströmungen mit $w < c$, das für $P^2 + Q^2 < b_*^2$ analytisch und positiv regulär ist. Wir betrachten also das Variationsproblem (3.1), dessen Grundfunktion (4.1) $F(P, Q) = \overline{\varphi} - \xi \overline{\varphi}_\xi - \eta \overline{\varphi}_\eta$ zur negativen Hamiltonfunktion

$$\text{(4.4)} \qquad \begin{cases} \zeta = \overline{\varphi}(\xi, \eta) = \mathfrak{p}(\mathfrak{i}_0 - \tfrac{1}{2} w^2, s_0) \\ \xi = v = -F_P, \qquad \eta = -u = -F_Q \end{cases}$$

gehört. Dann ist die Matrix

$$\text{(4.5)} \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} F_{PP} & F_{PQ} \\ F_{QP} & F_{QQ} \end{pmatrix} = -\frac{1}{g} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_{\eta\eta} & -\overline{\varphi}_{\eta\xi} \\ -\overline{\varphi}_{\xi\eta} & \overline{\varphi}_{\xi\xi} \end{pmatrix} = -\frac{1}{g} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_{uu} & \overline{\varphi}_{uv} \\ \overline{\varphi}_{vu} & \overline{\varphi}_{vv} \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\mathfrak{i} - \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} u^2 & -\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} uv \\ -\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} uv & \mathfrak{p}_\mathfrak{i} - \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} v^2 \end{pmatrix} = \frac{\mathfrak{p}_\mathfrak{i}}{g} \begin{pmatrix} 1 - \frac{u^2}{c^2} & -\frac{uv}{c^2} \\ -\frac{uv}{c^2} & 1 - \frac{v^2}{c^2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit

$$\text{(4.6)} \qquad g = \overline{\varphi}_{uu}\overline{\varphi}_{vv} - \overline{\varphi}_{uv}^2 = \mathfrak{p}_\mathfrak{i}^2 \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{c^2}\right).$$

Da

$$\text{(4.7)} \qquad \begin{vmatrix} 1 - \lambda - \frac{u^2}{c^2} & -\frac{uv}{c^2} \\ -\frac{uv}{c^2} & 1 - \lambda - \frac{v^2}{c^2} \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\left(1 - \lambda - \frac{u^2 + v^2}{c^2}\right) = 0$$

unter der Voraussetzung (4.3) die Wurzeln $0 < \lambda_1 = 1 - \frac{u^2 + v^2}{c^2} < \lambda_2 = 1$ hat, ist wegen $\frac{\mathfrak{p}_\mathfrak{i}}{g} = \frac{1}{\mathfrak{p}_\mathfrak{i}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)}$

$$\text{(4.8)} \qquad \frac{1}{\varrho}(X^2 + Y^2) \leqq F_{PP} X^2 + 2F_{PQ} XY + F_{QQ} Y^2 \leqq \frac{1}{\varrho} \frac{1}{1 - (u^2 + v^2)/c^2}(X^2 + Y^2).$$

Ein Strömungsgebiet T mit Rand, wie wir es im nun folgenden Teil II annehmen, könnten wir auch mit den Methoden der Nr. 3 behandeln, indem wir aus T und seinem Doppel eine geschlossene Fläche M machen, vgl. [16].

II. Eine umfassende Methode zur Herstellung von Unterschallströmungen mit beliebig großen unterkritischen Geschwindigkeiten

1. Problemstellung. Ebene Strömung in einem ringförmigen Kanal um eine Kontur

Ich betrachte die isentropische drehungsfreie *ebene* Unterschallströmung eines Gases in einem *beschränkten* ringförmigen Kanal mit den Wänden S_0 (außen), S_1, in dem sich ein Profil S_* befindet; S_* bildet zusammen mit den Wänden S_0, S_1 die Gesamtbegrenzung S des Strömungsgebietes T. Die Randkomponenten S_0, S_1, S_* seien sämtlich stetig gekrümmt, auch das Profil *ohne* Ecke, genauer

von der Klasse Bh in der Bezeichnung von LICHTENSTEIN [1]; dies verlangt daß für die Parameterdarstellung $x=x(s)$, $y=y(s)$, $s=$ Bogenlänge, einer Randkomponente die sog. $2+\lambda$-Norm

$$(1) \qquad |x|_{2+\lambda} \overset{\text{def}}{=} \text{ob. Grenze}_{S} \{|x|, |\dot{x}|, |\ddot{x}|, r^{-\lambda}|\ddot{x}' - \ddot{x}|\}, \qquad |y|_{2+\lambda} = \cdots$$

existiert, das soll heißen eine endliche Konstante ist. Dabei gilt für den Exponenten λ die Ungleichheit $0<\lambda<1$. Es ist r die Entfernung zweier Punkte P, P', in denen die Funktionen $x(s)$, ... bzw. ihre Ableitungen $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots$ zu nehmen sind.

Für Unterschallströmungen, für die zwischen Geschwindigkeit w, kritischer Geschwindigkeit c_* und lokaler Schallgeschwindigkeit c die Beziehung

$$w < c_* < c$$

gilt, lautet die Differentialgleichung für die Stromfunktion ψ, da die Strömung konstante Entropie s^0 haben soll und daher wirbelfrei ist

$$(2a) \qquad \frac{\partial F_P}{\partial x} + \frac{\partial F_Q}{\partial y} = 0$$

mit der in I (4.1) definierten Lagrange-Funktion F oder explizit

$$(2) \qquad \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\psi_{xx} - 2\frac{uv}{c^2}\psi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\psi_{yy} = 0.$$

Für

$$(3) \qquad \varpi = \psi_x^2 + \psi_y^2 < b_*^2$$

ergeben sich aus (4.2) u, v sowie

$$(3a) \qquad c^2 = \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{ii}$$

als reguläre analytische Funktionen von $P=\psi_x$, $Q=\psi_y$; es ist $w<c_*<c$ und die Differentialgleichung (2) ist vom elliptischen Typ.

Die Wände S_0+S_1 und die Kontur S_* müssen Stromlinien $\psi=\text{const}$ sein; genauer legen wir die Strömung und auch ihre Zirkulationen um S_1, S_* fest durch die Randbedingung

$$(4) \qquad \psi = 0 \text{ auf } S_0, \quad \psi = k \text{ auf } S_1, \quad \psi = \gamma k \text{ auf } S_* \quad (k, \gamma = \text{const}, 0<\gamma<1).$$

Es ist dann die Durchflußmenge

$$(5) \qquad \int_{(0)}^{(1)} d\psi = k;$$

das Integral ist zu erstrecken auf einem Querschnitt, der von S_0 zu S_1 führt. Die Gasmengen, die zu beiden Seiten des Profils vorbeiströmen, stehen im *fest* gegebenen Verhältnis $\gamma:1-\gamma$

Wir betrachten zunächst das Problem im Kleinen: In der Nachbarschaft einer irgendwie bekannten zur Durchflußmenge k gehörenden Unterschallströmung $\mathring{\psi}(x, y)$ (etwa der Ruhe $\mathring{\psi}\equiv 0$) als Ausgangslösung, die noch weitere

Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen muß, vgl. **3**, sind weitere Lösungen $\psi(x, y)$ zu finden, die zu Durchflußmengen $k = \breve{k} + \alpha$, $\alpha < \delta$ gehören; dabei ist δ eine kleine positive Zahl.

Wir setzen die Stromfunktion

$$\psi = \mathring{\psi} + \zeta \tag{6}$$

und bekommen durch Umrechnen der Lagrange-Funktion F auf ζ

$$F = \mathring{F} + \mathring{F}_P \zeta_x + \mathring{F}_Q \zeta_y + H + \hat{H}. \tag{7}$$

Als neue Lagrange-Funktion für ζ kann daher $H + \hat{H}$ genommen werden, wo

$$H = \tfrac{1}{2}(\mathring{a}\zeta_x^2 + 2\mathring{b}\zeta_x\zeta_y + \mathring{c}\zeta_y^2), \tag{8}$$

$$\breve{a} = F_{PP}(\mathring{\psi}_x, \mathring{\psi}_y), \ldots, \qquad \mathring{c} = F_{QQ}(\mathring{\psi}_x, \mathring{\psi}_y) \tag{9}$$

der quadratische Teil und $\hat{H}$ von höherem als zweiten Grad in den Ableitungen ζ_x, ζ_y ist.

Die elliptische Differentialgleichung für die Zusatzstromfunktion $\zeta(x, y)$ erhält somit die Form

$$\left\{\begin{aligned} \mathring{\Delta}(\zeta) &\equiv \frac{\partial}{\partial x}(\breve{a}\zeta_x + \mathring{b}\zeta_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathring{b}\zeta_x + \mathring{c}\zeta_y) \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{H}_{\zeta_x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{H}_{\zeta_y}\right) \equiv -\mathring{F} \quad \text{in} \quad T. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Die Randbedingung ist

$$\zeta = 0 \quad \text{auf} \quad S_0, \qquad \zeta = \alpha \quad \text{auf} \quad S_1, \qquad \zeta = \gamma\alpha \quad \text{auf} \quad S_*. \tag{11}$$

Das Durchflußverhältnis γ wird festgehalten.

Nach Division der Gleichung (10) durch $\sqrt{\mathring{a}\mathring{c} - \mathring{b}^2}$ nimmt sie die Form

$$\Delta(\zeta) = -F \tag{10a}$$

an, wo der Differentialausdruck $\Delta(\zeta)$ statt $\mathring{a}, \mathring{b}, \mathring{c} \,|\, a, b, c$ mit $ac - b^2 = 1$ enthält.

2. Hilfssätze der Potentialtheorie und der Theorie elliptischer Differentialgleichungen

Wir stellen — ohne Beweise — die Sätze zusammen, die wir beim Existenzbeweis für die Lösung unseres gasdynamischen Problems benötigen würden; sie finden sich großenteils in den beiden Enzyklopädieartikeln von L. Lichtenstein [*1*].

1. Im stetig gekrümmten Bereich $T + S$ der Klasse Bh handele es sich zunächst um eine spezielle Lösung der Poissonschen Differentialgleichung

$$\Delta V = -F, \tag{12}$$

wobei Δ der Laplacesche Differentialausdruck ist und für die Dichte F eine Bedingung

$$|F| \leqq \mathfrak{C}_0, \qquad |F(P') - F(P)| \leqq \mathfrak{C}_0 r^\lambda, \qquad 0 < \lambda < 1, \qquad r = \overline{PP'} \tag{13}$$

besteht, kurz gesagt

(13a) $|F|_\lambda \equiv \text{ob. Grenze}_{T+S} (|F|, r^{-\lambda}|F'-F|) = \mathfrak{C}_0 < +\infty$ existiert,

nämlich um die Lösung, die durch das logarithmische Potential der ebenen Belegung F gegeben ist

$$V = \frac{1}{2\pi} \iint_T \log \frac{1}{r} \cdot F' \, dx' \, dy'. \tag{14}$$

Unter der Voraussetzung (13) existieren analog wie bei dem von O. HÖLDER, daraufhin untersuchten Newtonschen Potential auch die zweiten Ableitungen $D_2 V$ in $T+S$ und außerdem gilt nach KORN [*1*a, S. 209]

$$|V|_{2+\lambda} \equiv \text{ob. Grenze}_{T+S} \{|V|, |D_1 V|, |D_2 V|, r^{-\lambda}|D_2 V' - D_2 V|\} \leqq K_0(\mathfrak{C}_0), \tag{15}$$

wobei irgend eine 1. Ableitung $D_1 V$, irgend eine 2. Ableitung $D_2 V$ und irgendein λ-Quotient einer zweiten Ableitung gemeint ist und die Konstante (außer vom Bereich) noch von $\mathfrak{C}_0$ abhängt.

Schon die Ungleichheiten (13), (15) hätten für ein nicht beschränktes Gebiet eine viel kompliziertere Gestalt.

2. Wir betrachten die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie

$$\Delta W = 0 \quad \text{in} \quad T, \tag{17}$$

$$W = f(s) \quad \text{auf} \quad S, \quad \text{wobei} \quad |f|_{2+\lambda} \quad \text{existiert.} \tag{16}$$

Die völlig bestimmte *eindeutige* Lösung W kann als logarithmisches Potential einer auf S ausgebreiteten Doppelbelegung angesehen werden, deren Dichte $\nu(s)$ sich aus einer Fredholmschen Integralgleichung mit der rechten Seite $f(s)$ bestimmt. Daraus folgt die Existenz und Endlichkeit von

$$|\nu|_{2+\lambda} \quad \text{auf } S$$

und sodann von

$$|W|_{2+\lambda} \quad \text{in } T+S$$

nach Sätzen von KORN ,vgl. [*1*a], S. 243, KELLOGG [*2*].

3. Kombination von 1. und 2. führt zur Auflösung der ersten Randwertaufgabe für die Poissonsche Gleichung

$$\Delta Z = -F \quad \text{in} \quad T, \tag{18}$$

$$Z = f \quad \text{auf} \quad S, \tag{19}$$

wobei $|F|_\lambda + |f|_{2+\lambda} \leqq \mathfrak{C}_1$ in $T+S$.

Man erhält die Endlichkeit von

$$|Z|_{2+\lambda} \leqq K_1(\mathfrak{C}_1), \tag{20}$$

indem man mit dem in 1. bestimmten logarithmischen Potential V zunächst

$$Z = V + W$$

setzt, für W die Randwertaufgabe

$$\Delta W = 0 \quad \text{in} \quad T \tag{22}$$

$$W = f - V \quad \text{auf} \quad S \quad \text{mit} \quad |f - V|_{2+\lambda} \quad \text{auf } S, \text{ nach 1.}, \tag{21}$$

erhält und auch 2. anwendet.

4. Statt der Laplaceschen oder Poissonschen Gleichung betrachten wir nun die allgemeine elliptische Differentialgleichung

$$\bar{\Delta}(Z) \equiv a(x, y) Z_{xx} + 2b Z_{xy} + c Z_{yy} + d Z_x + e Z_y = -F \quad \text{in} \quad T \tag{23}$$

$$Z = f \quad \text{auf} \quad S, \tag{24}$$

wobei für die von x, y abhängigen Koeffizienten $a, b, c(x, y)$

$$a c - b^2 = 1 \tag{25}$$

$$|a|_\lambda, \ldots, |c|_\lambda \leqq \mathfrak{C}, \quad |d|_\lambda, \ |e|_\lambda \quad \text{vorhanden in } T + S \tag{26}$$

sei und obendrein

$$|F|_\lambda + |f|_{2+\lambda} \leqq \mathfrak{C} \quad \text{in} \quad T + S \tag{27}$$

existiere. Dann gilt wie in (20) die Abschätzung

$$|Z|_{2+\lambda} \leqq K(\mathfrak{C}) \quad \text{in} \quad T + S \tag{28}$$

mit einer noch von der Schranke $\mathfrak{C}$ in (26), (27) abhängigen Konstanten. Der Beweis der Abschätzung (28) ist von SCHAUDER [3] mit einer Methode von KORN geleistet worden, zunächst unter der Voraussetzung, daß eine Lösung von (23), (24) mit $|Z|_{2+\lambda}$ in $T + S$ existiere. Auf diese Abschätzung gestützt, hat SCHAUDER auch den Existenzbeweis für die Lösung von (23), (24) geführt und zwar, indem er statt

$$\bar{\Delta} | \Delta + t(\bar{\Delta} - \Delta), \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

(symbolisch gesprochen) setzte und durch schrittweise Fortsetzung nach t vom Fall 3. der Poissonschen Gleichung (18), $t = 0$, wirklich zum Parameterwert $t = 1$ und damit zu der in Frage stehenden elliptischen Gl. (23) gelangen kann. Hier will ich diese Methode der schrittweisen Fortsetzung nach einem Parameter wenigstens erwähnt haben, da sie nachher bei der Behandlung der nichtlinearen Gl. (10) bis zur kritischen Geschwindigkeit hin unentbehrlich wird.

3. Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung in der Nachbarschaft einer gegebenen Lösung

Ist die zu $k = \mathring{k}$ gehörige Ausgangslösung $\mathring{\psi}$ mit $|D_1 \mathring{\psi}| \leqq b_0 < b_*$ und mit endlichem $|\mathring{\psi}|_{2+\lambda}$, so sind, wie wir sahen, die zu benachbarten Werten $k = \mathring{k} + \alpha$ gehörigen Lösungen $\psi = \mathring{\psi} + \zeta$ bestimmt durch die erste Randwertaufgabe der

nichtlinearen Differentialgleichung (10a), (11)

$$\Lambda(\zeta) = -F\{\zeta\} \quad \text{in} \quad T \tag{29}$$

$$\zeta = f = \begin{cases} 0 \\ \gamma\alpha \\ \alpha \end{cases} \quad \text{auf} \quad S \begin{cases} S_0 \\ S_* \\ S_1 \end{cases} \tag{30}$$

die Gleichung (29) genügt dann den Bedingungen (25), (26), (27) von Nr. 4, Ich setze $\zeta = \chi + Z$, wobei χ die Lösung des in Nr. 4 behandelten linearen Problems

$$\Lambda(\chi) = 0 \quad \text{in} \quad T \tag{31}$$

$$\chi = f \quad \text{auf} \quad S \tag{32}$$

ist. Es ist $\chi = \alpha\,\chi_1$, wobei χ_1 die Lösung des Problems (31), (32), (30) mit $\alpha = 1$ in T.

Die Zusatzfunktion Z muß den Gleichungen

$$\Lambda(Z) = -F\{\zeta\} \quad \text{in} \quad T \tag{33}$$

$$Z = 0 \quad \text{auf} \quad S \tag{34}$$

genügen. Dabei gilt für das Funktional $F\{\zeta\}$ auf der rechten Seite

$$|F|_\lambda \leqq \bar{A}\,\Omega^2 \quad \text{falls} \quad |\zeta|_{2+\lambda} \leqq \Omega < \varepsilon_0 \tag{35}$$

$$|F - \dot{F}|_\lambda \leqq \bar{B}\,\Omega\,V \quad \text{falls} \quad |\zeta - \dot{\zeta}|_{2+\lambda} \leqq V \leqq 2\Omega, \tag{36}$$

$\dot{F} = F\{\dot{\zeta}\}$ für eine zweite wie ζ beschaffene Funktion $\dot{\zeta}$ gesetzt. Bestimmen wir durch die Bedingungen

$$\begin{cases} \Lambda(\mathfrak{G}) = 0 \quad \text{für} \quad P(x, y) \quad \text{in} \quad T \\ \mathfrak{G} = 0 \quad \text{für} \quad P(x, y) \quad \text{auf} \quad S \\ \mathfrak{G} = -\frac{1}{2}\log\left[c(x-x')^2 - 2b(x-x')(y-y') + a(y-y')^2\right] + \\ \qquad + \text{beschr. Fkt. in der Umgebung von } P'(x,'\,y') \end{cases} \tag{37}$$

die erste Greensche Funktion $\mathfrak{G}(P, P')$ von Λ, so wird bekanntlich

$$Z = -\frac{1}{2\pi} \iint_T \mathfrak{G} \cdot F'\{\zeta\}\, d\,x'\, d\,y' = \mathfrak{Z}\{\zeta\}, \tag{38}$$

so daß statt (29), (30) endgültig die Integro-Differentialgleichung

$$\zeta = \chi + \mathfrak{Z}\{\zeta\} \tag{39}$$

kommt. Es gilt dann auch

$$|\mathfrak{Z}|_{2+\lambda} \leqq A\,\Omega^2, \quad |\mathfrak{Z}\{\zeta\} - \mathfrak{Z}\{\dot{\zeta}\}|_{2+\lambda} \leqq B\,\Omega\,V. \tag{40}$$

Der erste Term χ genügt der Ungleichheit

$$|\chi|_{2+\lambda} \leqq \beta\,\Omega_1 \quad \text{falls} \quad |\alpha| \leqq \Omega_1 \leqq \delta_1. \tag{41}$$

Diese Bedingungen garantieren für genügend kleines $|\alpha| \leqq \delta_1$ eine eindeutig bestimmte Lösung der Integro-Differentialgleichung (39). Die Koeffizienten $\bar{A}, \bar{B}, A, B, \ldots$ hängen von der Norm $|\mathring{\psi}|_{2+\lambda}$ ab; mit β bezeichnen wir unterschiedslos Konstante.

Die Lösung ist nach LICHTENSTEIN, l. c. [4, S. 101ff., S. 14ff., S. 88ff.] durch sukzessive Approximationen

$$(42) \qquad \begin{cases} {}_0\zeta = \chi \\ {}_1\zeta = \chi + \mathfrak{Z}({}_0\zeta) \\ \vdots \\ {}_\nu\zeta = \chi + \mathfrak{Z}({}_{\nu-1}\zeta), \ldots \end{cases}$$

herstellbar, indem sich die Näherungen ${}_\nu\zeta$ unbeschränkt bilden lassen und ihre Differenzen ${}_\nu\zeta - {}_{\nu-1}\zeta$ dem Betrage nach wie die Glieder einer geometriscen Reihe abnehmen, also $\zeta = \lim\limits_{\nu\to\infty} {}_\nu\zeta$ existiert. Es gilt

$$(43) \qquad |\zeta|_{2+\lambda} \leqq \varepsilon_0 .$$

Hinterher zeigt man auch, daß sich die Lösung als Potenzreihe nach α entwickeln läßt:

$$(44) \qquad \zeta = \alpha\chi_1(x, y) + \alpha^2\chi_2(x, y) + \cdots .$$

All das gilt für ein α-Intervall

$$(45) \qquad |\alpha| \leqq \delta(|\mathring{\psi}|_{2+\lambda}),$$

das außer von der Begrenzung S noch von der Ausgangslösung $\mathring{\psi}$ und ihren Ableitungen bis zur 2. Ordnung und deren λ-Quotienten abhängt.

4. Beweis des Existenzsatzes im Großen

Wir können nun die Lösung (immer bei festem γ) in Abhängigkeit von dem in die Randbedingung eingehenden Parameter k schrittweise fortsetzen also die Durchflußmenge solange steigern, bis Unterschallgeschwindigkeiten w in beliebiger Nähe der kritischen Geschwindigkeit c_* im Strömungsfeld auftreten. Genauer besteht folgender Sachverhalt:

Wir nehmen c_0 beliebig wenig unterhalb der kritischen Geschwindigkeit c_* an und werden eine Lösung ψ angeben, bei der Unterschallgeschwindigkeiten $w > c_0$ vorkommen.

Beim Beweise betrachten wir die Menge $\{\psi\}$ von Unterschallströmungen mit Geschwindigkeiten $w \leqq c_0$; für diese sind die Ableitungen

$$(46) \qquad |\psi_x|, \ |\psi_y| \leqq b_0 \quad \left(= \sqrt{2(i_0 - i^0)}\, g_i^0 \quad \text{mit} \quad i^0 = i_0 - \tfrac{1}{2} c_0^2\right)$$

und, wenn l die Länge des kleinsten Querschnittes zwischen S_0 und S_1 ist, die Durchflußmenge

$$(47) \qquad k \leqq b_0 l = k_0 .$$

Nun gilt, wie wir nach S. BERNSTEIN [5] und SCHAUDER [6] nachher darlegen werden, für die Menge $\{\psi\}$

$$|\psi|_{2+\lambda} \leqq C(b_0) \tag{48}$$

mit einer nur noch vom Gebiet $T+S$ abhängigen Funktion C von b_0, d. h. für die zweiten Ableitungen der Lösungen $\{\psi\}$ und ihre H-Quotienten lassen sich apriori-Abschätzungen angeben, sobald eine Schranke für die ersten Ableitungen bekannt ist.

Nach dem Ergebnis (45) kann man dann behaupten: Nimmt man aus der Menge $\{\psi\}$ irgendeine zu $\mathring{k}$ gehörige Lösung $\mathring{\psi}$ als Ausgangslösung, so kann man noch für Durchflußmengen $k=\mathring{k}+\alpha$ mit

$$0 < \alpha \leqq \delta\left(C(b_0)\right) = \delta_0 \tag{49}$$

(eindeutig bestimmte) Unterschallströmungen finden, und zwar mit Geschwindigkeiten

$$w \leqq \bar{c}_0, \quad c_0 < \bar{c}_0 < c_*, \quad \bar{c}_0 \text{ fest.} \tag{50}$$

Damit die letzte Bedingung erfüllt ist, muß man δ_0 nur genügend klein wählen.

Mit diesem *festen* α-Schritt der Größe δ_0 gehen wir mit SCHAUDER [6] und SCHAUDER-LERAY [7] folgendermaßen an die Herstellung der Lösungen von (2), (4).

Von der Ruhe, $\mathring{k}=0$, die der bekannten Lösung $\mathring{\psi} \equiv 0$ entspricht, stellen wir nach (49) die Lösungen ψ mit $0<k\leqq\alpha$, $\alpha \leqq \delta_0$ her. Die dabei auftretenden Geschwindigkeiten sind sicher $w \leqq \bar{c}_0$; kommt wirklich an einer Stelle schon $w > c_0$ vor, sind wir fertig: Wir haben Lösungen bestimmt, bei denen Unterschallgeschwindigkeiten $w > c_0$ auftreten. Andernfalls ($w \leqq c_0$) gehören alle zu $0 \leqq k \leqq \delta_0$ konstruierten Lösungen zur Menge $\{\psi\}$; nehmen wir die zu $k=\delta_0$ gehörige Lösung $\dot{\psi}$ als neue Ausgangslösung (für sie ist $k \leqq k_0$). Wir können wieder für $k=\delta_0+\alpha$, $0<\alpha\leqq\delta_0$ Nachbarlösungen ψ konstruieren, die sicher $w \leqq \bar{c}_0$ haben. Kommt $w > c_0$ vor, sind wir fertig; sonst gehen wir in derselben Weise weiter. Da die α-Schritte alle von der gleichen Größe δ_0 sind, erreichen wir nach *endlich* vielen, N, Schritten Lösungen ψ mit Geschwindigkeiten w, $c_0 < w \leqq \bar{c}_0$, nämlich sicher dann, wenn zum ersten Male $k = N\delta_0 > k_0$ geworden ist. Dann kann nicht mehr $w \leqq c_0$ sein, da ja das $k \leqq k_0$ zur Folge hätte.

5. Die apriori-Abschätzungen der zweiten Ableitungen bei gegebener Schranke für die ersten Ableitungen

Wir wenden uns jetzt zur fundamentalen Ungleichheit (48)

$$|\psi|_{2+\lambda} \leqq C\left(\operatorname{Max}|D_1\psi|\right). \tag{48a}$$

Zuerst beweist man mit S. BERNSTEIN

$$\text{a)} \quad |D_2\psi| \leqq C_1\left(\operatorname{Max}|D_1\psi|\right) \leqq C_1(b_0). \tag{51}$$

Erst nachher zeigen wir dann mit SCHAUDER [6]

$$\text{b)} \quad |D_2\psi|_\lambda \leqq C_2(b_0).$$

Der Bereich $T+S$ und damit die kleinste Querschnittslänge l sowie b_0, $k_0=b_0 l$ werden festgehalten.

Die *Ungleichheit* a) hat man in zwei Schritten zu beweisen:

1. auf der Berandung S des Strömungsgebietes mit der Methode der Hilfsfunktion, nach BERNSTEIN [5], S. 123 in der Fassung von ZWIRNER [8].

2. im Innern T des Strömungsgebietes, nach BERNSTEIN [5], S. 119—123.

Beim 1. Schritt transformiere ich $T+S$ durch eine feste, auch noch auf den Rändern reguläre konforme Abbildung auf ein von den konzentrischen Kreisen Σ_0 und Σ_1 sowie von der Kurve Σ^* begrenztes Ringgebiet $\Theta+\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_*$ der X, Y-Ebene ab, das ich auch auf Polarkoordinaten ϱ, σ mit dem Mittelpunkt der beiden Kreise als Ursprung beziehe, und überpflanze die Stromfunktion $\psi(x, y)=\psi(X, Y)$. Ich suche Abschätzungen von $D_2\psi$ am Außenkreisrand Σ_0 ($\varrho=1$). Durch zwei andere feste (d. h. von ψ unabhängige) konforme Abbildungen kann ich auch S_1 oder S_* auf den Außenrand Σ_0 eines Kreisringgebietes abbilden. Die drei Abschätzungen von $|D_2\psi|$ auf Σ_0 geben bei der Umrechnung auf die alten Koordinaten x, y Abschätzungen der ursprünglichen zweiten Ableitungen auf den ursprünglichen Begrenzungslinien S_0 sowie S_1 und S_*. Die Transformationsformeln $x=x(X, Y)$, $y=y(X, Y)$ sind ja mit der Berandung von der Klasse Bh.

Die Differentialgleichung hat *nach* der konformen Abbildung in Polarkoordinaten ϱ, σ die Form (mit Koeffizienten $A, \ldots, D\left(\varrho, \sigma, \frac{\partial\psi}{\partial\varrho}, \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)$

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2}+2B\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho\,\partial\sigma}+C\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}=D; \tag{52}$$

sie ist elliptisch.

Durch Differentiation nach σ ergibt sich, wenn im Moment $\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}=\pi$ gesetzt wird, für $\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}=\psi_1=\varkappa$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &A\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\varrho^2}+2B\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\varrho\,\partial\sigma}+C\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\sigma^2}=D_\sigma+D_\pi\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}+D_\varkappa\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}- \\ &\quad-\left(A_\sigma+A_\pi\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}+A_\varkappa\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right)\frac{1}{A}\left(D-2B\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}-C\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right)- \\ &\quad-2\left(B_\sigma+B_\pi\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}+B_\varkappa\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}-\left(C_\sigma+C_\pi\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}+C_\varkappa\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma} \\ &\qquad\equiv f\left(\varrho, \sigma, \frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}, \frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right). \end{aligned} \tag{53}$$

Dabei ist f eine in $\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}$, $\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}$ quadratische Funktion mit Koeffizienten von der Form:

$$\frac{1}{A}2BA_\pi\left(\varrho, \sigma, \frac{\partial\psi}{\partial\varrho}(\varrho, \sigma), \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}(\varrho, \sigma)\right), \ldots, C_\varkappa, D_\pi, \ldots, D_\sigma.$$

Das sind beim Vorhandensein der Schranke (46) für die ersten Ableitungen von ψ *beschränkte* Funktionen von ϱ, σ.

In rechtwinkligen Koordinaten X, Y schreibt sich die Gleichung

$$(54) \quad A_1(\psi_1) \equiv A_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X \partial Y} + C_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial Y^2} = f_1\left(X, Y, \frac{\partial \psi_1}{\partial X}, \frac{\partial \psi_1}{\partial Y}\right).$$

Sie ist elliptisch und die linke Seite und die quadratische Funktion f_1 haben wieder beschränkte Koeffizienten im Bildgebiet $\Theta + \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_*$. Auf Σ_0 (und Σ_1) ist $\psi_1 = 0$.

Man führt nun *Hilfsfunktionen*

$$(55) \qquad \omega = e^{h\psi_1} + h'(X^2 + Y^2) \quad \text{bzw.} \quad \underline{\omega} = -e^{-h\psi_1} - \underline{h}'(X^2 + Y^2)$$

ein. ω besitzt die Ableitungen

1. Ordnung $\qquad \frac{\partial \omega}{\partial X} = e^{h\psi_1} h \frac{\partial \psi_1}{\partial X} + 2h' X, \ldots$

2. Ordnung $\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} = e^{h\psi_1} h^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial X}\right)^2 + e^{h\psi_1} h \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X^2} + 2h', \ldots .$

Für ω bekommen wir so aus (54) die Differentialgleichung

$$(56) \quad \begin{cases} A_1(\omega) = h e^{h\psi_1} \left\{ h \left[A_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial X}\right)^2 + 2B_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \frac{\partial \psi_1}{\partial Y} + C_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial Y}\right)^2 \right] + \right. \\ \left. + f_1\left(X, Y, \frac{\partial \psi_1}{\partial X}, \frac{\partial \psi_1}{\partial Y}\right) \right\} + 2h'(A_1 + C_1) \equiv P. \end{cases}$$

Da die rechts in der Klammer $\{\cdots\}$ zuerst stehende quadratische Form positiv definit und ebenso $A_1 + C_1 > 0$ ist, gilt für hinreichend große feste Werte $h' > 0$ sicher

$$(57) \qquad P \geqq m > 0 \quad \text{für alle Werte} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial X}, \frac{\partial \psi_1}{\partial Y}.$$

Die Gesamtheit der in $\{\cdots\}$ auftretenden Glieder zweiten Grades in $\frac{\partial \psi_1}{\partial X}, \frac{\partial \psi_1}{\partial Y}$ ist nämlich für genügend große $h > h_1$ positiv definit. Halten wir $h (> h_1)$ fest, so gilt bei genügend großem Q

$$(58) \qquad \text{für} \quad \Pi \equiv \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial Y}\right)^2 > Q: \quad \{\cdots\} = h[\cdots] + f_1 > 0,$$

dagegen

$$(59) \qquad \text{für} \quad \Pi \leqq Q \qquad\qquad \{\cdots\} > N$$

mit einer gewissen eventuell negativen Konstanten $N(Q(h))$. Machen wir endlich $h' > 0$ genügend groß, so ergibt sich (57), da ja ψ_1 zwischen festen Schranken liegt.

Insgesamt folgt für ω und analog für $\underline{\omega}$

$$(60) \qquad A_1(\omega) > 0 \quad \text{in} \quad \Theta + \Sigma, \quad \text{so daß } \omega \text{ kein Maximum in } \Theta,$$

$$(61) \qquad A_1(\underline{\omega}) < 0 \quad \text{in} \quad \Theta + \Sigma, \quad \text{so daß } \underline{\omega} \text{ kein Minimum in } \Theta$$

besitzt. Denn wenn man die positiv definite Matrix

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{pmatrix} = (A_{ij}) = (\alpha_{ij})^2, \tag{62}$$

(α_{ij}) symmetrisch, positiv definit, also

$$A_{ij} = \sum_l \alpha_{li}\alpha_{lj} \qquad (i, j, l = 1, 2)$$

setzt, schreibt sich

$$\Delta_1(\omega) = \sum_l \sum_{ij} \alpha_{li} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X_i \partial X_j} \alpha_{lj}. \tag{63}$$

Hätte nun ω an einer Stelle X, Y ein Maximum, so wäre die Matrix $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X_i \partial X_j}\right)$ negativ semidefinit und es ergäbe sich $\Delta_1(\omega) \leqq 0$ in Widerspruch zu (60). Analog schließt man bei $\underline{\omega}$.

Nehmen wir statt ω $|\omega - (\alpha X + \beta Y + \varkappa) = \omega_*$, so ist auch dies eine solche Funktion, die kein Maximum in Θ besitzt — denn es ist ja auch $\Delta_1(\omega_*) = \Delta_1(\omega) > 0$.

Ich betrachte nun zuerst die Fläche $z = \omega(X, Y)$; sie geht wegen $\psi_1 = 0$ auf Σ_0 durch den über Σ_0 liegenden horizontalen Kreis Γ_0 in der Ebene $z = 1 + h'$. Über Σ_1 und Σ_* geht die Fläche durch gewisse Raumkurven Γ_1 und Γ_*, die sicher zwischen zwei festen Ebenen liegen, da ja ψ_1 eine durch angebbare Schranken begrenzte Funktion ist.

Es sei Δ die Maximalsteigung aller Ebenen ε, die Γ_0 tangieren und einen Punkt von $\Gamma_1 + \Gamma_*$ enthalten. Ist dann P der Berührungspunkt auf Γ_0 und P' ein Punkt im Innern der von $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_*$ begrenzten Fläche $z = \omega(X, Y)$, so ist der Differenzenquotient

$$\frac{\omega(P') - \omega(P)}{r} \leqq \Delta. \tag{64}$$

Denn wäre er $> \Delta$, so verliefe die Ebene $\varepsilon(g, P')$ (welche die Tangente g an Γ_0 in P und den Punkt P' enthält) ganz oberhalb der Raumkurven $\Gamma_1 + \Gamma_*$. Das gilt auch noch, wenn wir ε durch eine kleine Drehung um g in eine Lage $\underline{\varepsilon}$, $z = \alpha X + \beta Y + \varkappa$ bringen, die etwas unterhalb P' verläuft. Dann wäre die Funktion

$$\omega - (\alpha X + \beta Y + \varkappa) \begin{cases} > 0 & \text{in } P' \\ \gtrless 0 & \text{auf } \Gamma_0 \text{ sowie } \Gamma_1 + \Gamma_* \end{cases} \tag{65}$$

und hätte ein Maximum, was nicht geht. Also gilt (64).

Läßt man $P' \to P$ rücken, so folgt eine Ungleichheit

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varrho} \leqq \Delta \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \varrho} \leqq \frac{\Delta + 2h'}{h} \tag{66}$$

auf Σ_0. Die Ableitung existiert, da bei der ganzen Betrachtung die Existenz von $D_2\psi$ in $T + S$ vorauszusetzen ist und nur ihre Schranken in Frage stehen.

Indem man auch die Fläche $z=\underline{\omega}(X, Y)$ heranzieht sowie die algebraische kleinste Steigung Δ aller Ebenen $\varepsilon(g, P')$, P' auf $\Gamma_1+\Gamma_*$, findet man noch

$$\underline{\Delta} \leqq \frac{\underline{\omega}(P')-\underline{\omega}(P)}{r}, \quad \underline{\Delta} \leqq \frac{\partial}{\partial \varrho}\underline{\omega}(P), \quad \frac{\underline{\Delta}-2\underline{h}'}{h} \leqq \frac{\partial \psi_1}{\partial \varrho}, \tag{67}$$

wo nur vom Gebiet $T+S$ abhängige Konstanten stehen.

Mit (66), (67) folgt auch eine Abschätzung des Betrags

$$\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial \varrho}\right| = \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho\, \partial \sigma}\right| \leqq N_1(b_0) \text{ auf } \Sigma_0. \tag{68}$$

Selbstverständlich ist

$$\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma}\right| = \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2}\right| \leqq N_1 \text{ auf } \Sigma_0, \tag{69}$$

die linke Seite ist sogar Null. Endlich folgt aus der Differentialgleichung (52), $A_1>0$

$$\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2}\right| \leqq N_2(b_0) \text{ auf } \Sigma_0. \tag{70}$$

Alles in allem gibt es eine Schranke C_0, für die

$$|D_2\psi| \leqq C_0(b_0) \text{ auf } \Sigma_0. \tag{71}$$

Durch Rückgang in die x, y-Ebene wird schließlich die fundamentale Ungleichheit (51) auf S_0 bewiesen und mit Hilfe der beiden anderen konformen Abbildungen mit einem geeignetem C_0 auch auf S_1 und S_*.

Wir kommen nun

2. zur apriori-Abschätzung von $|D_2\psi|$ im Innern T. Dazu bildet man nach S. BERNSTEIN [5], S. 119/123 mit einer im Verlauf der Betrachtung zu bestimmenden Größe α und mit $M=\operatorname{Max}(|\psi|, |P|, |Q|)=\operatorname{Max}(b_0, k_0)$

$$W=\frac{1}{\alpha^2}e^{2\frac{P+M}{\alpha}}e^{2\varepsilon^{\frac{P+M}{\alpha}}}[A r^2+2B r s+C s^2], \tag{72}$$

$$W'=\frac{1}{\alpha^2}e^{2\frac{Q+M}{\alpha}}e^{2\varepsilon^{\frac{Q+M}{\alpha}}}[A s^2+2B s t+C t^2]. \tag{73}$$

Diese *sind* durch (71) schon abgeschätzt auf S. Um sie auch im Innern von T zu beurteilen, zeigt man: Falls $\operatorname{Max} W$ *in* T angenommen wird, gilt

$$W \leqq W_0 \quad \text{und analog} \quad W' \leqq W_0' \tag{74}$$

mit apriori-Schranken W_0, W_0', die nur von b_0 abhängen. Bei dieser Abschätzung die sehr komplizierte, hier nicht wiederzugebende Rechnungen erfordert, werden die Ableitungen vierter Ordnung der Lösung in T benutzt. Sie sind vorhanden, denn vorausgesetzt wird ja, daß $|\psi|_{2+\lambda}$ in $T+S$ existiert, und da die Koeffizienten A, B, C, D der Differentialgleichung (52) in P, Q analytisch oder mindestens zweimal λ-stetig differenzierbar angenommen werden, folgt aus einem Satz von E. HOPF [9], daß in T die Lösung λ-stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung besitzt. Da der Faktor vor der in W bzw. W'

enthaltenen quadratischen Form zwischen positiven Schranken liegt und die quadratischen Formen positiv definit sind, ergibt sich

$$|D_2\psi| < C_1(b_0) \quad \text{in } T \tag{75}$$

und auch auf S, falls $C_1 \geqq C_0$ genommen wird.

Es bleibt jetzt nur noch die *Abschätzung* b) des λ-Quotienten

$$|D_2\psi' - D_2\psi|/r^\lambda \leqq C_2(b_0). \tag{76}$$

Sie ergibt sich aus den Resultaten von SCHAUDER [3] über die Lösungen der linearen elliptischen Differentialgleichung (23) mit $d = e = F = 0$, also

$$a\psi_{xx} + 2b\psi_{xy} + c\psi_{yy} = 0, \tag{77}$$

deren Koeffizienten $a, b, c(x, y)$ der Determinantenbedingung (25) $ac - b^2 = 1$ und einer Bedingung (26) genügen — ja sogar einer Lipschitz-Bedingung $|a|_1, \ldots, |c|_1 \leqq L(b_0)$.

Dann gilt nach (28)

$$|\psi|_{2+\lambda} \leqq C_2(b_0). \tag{78}$$

Um diesen Satz auf unser Problem anzuwenden, muß man die Gl. (2) auf die Form (77) bringen mit den Koeffizienten

$$\frac{1 - u^2/c^2}{1 - w^2/c^2} = a(x, y), \quad \frac{-2uv/c^2}{1 - w^2/c^2} = b(x, y), \quad \frac{1 - v^2/c^2}{1 - w^2/c^2} = c(x, y). \tag{79}$$

Auf Grund von $w \leqq c_0$ sind die Voraussetzungen (46) erfüllt und mit der Feststellung (76) die Abschätzung (48) geleistet und damit die Möglichkeit gezeigt, die Lösung schrittweise fortzusetzen bis zu Geschwindigkeiten in beliebiger Nähe der kritischen Geschwindigkeit.

Literatur

[1] Die Sätze der Potentialtheorie und der Theorie elliptischer Differentialgleichungen finden sich großenteils in den beiden Encyklopädieartikeln von L. LICHTENSTEIN: a) Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildungen IIC3; b) Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus IIC12. — [2] KELLOG, O. D.: On the derivates of harmonic functions on the boundary. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 486—510 (1931). — [3] SCHAUDER, J.: Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **38**, 257—282 (1934). — [4] LICHTENSTEIN, L.: Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen. Berlin 1931; insbes. S. 14ff., S. 88ff., S. 101ff. — [5] BERNSTEIN, S.: Sur la généralisation du problème de Dirichlet. Math. Ann. **69**, 82—136 (1910). — [6] SCHAUDER, J.: Über das Dirichletsche Problem im Großen für nicht-lineare elliptische Differentialgleichungen. Math. Z. **37**, 623—634 (1933). — [7] LERAY, J., et J. SCHAUDER: Topologie et équations fonctionnelles. Ann. Ec. Norm. (III) **51**, 45—78. — [8] ZWIRNER, G.: Sull'equazione a derivate parziali delle superficie minime. Rend. Sem. Mat. Padova **4**, 140—154 (1933); insbes. S. 141ff. — [9] HOPF, E.: Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **34**, 194—233 (1931); insbes. S. 209f. — [10] HÖLDER, E.: Beiträge zur mathematischen Behandlung des Umströmungsproblems

der Gasdynamik. Lilienthal-Preisarbeit 1943. — [11] Morrey, C. B.: On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126—166 (1938). — [12] Morrey, C. B.: Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations and Related Topics. Univ. California Publ. in Mathematics, New Series **1** (1943); Chaps. 2 and 3. — [13] Shiffman, Max: On the existence of subsonic flows of a compressible fluid. J. Rational Mechanics and Analysis **1**, 605—652 (1952). — [14] Nirenberg, L.: On Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations and Hölder Continuity. Comm. Peur and Appl. Math. **6**, 103—156 (1953). — [15] Weyl, H.: Die Idee der Riemannschen Fläche. 3. Aufl. Stuttgart : B. G. Teubner 1955. — [16] Schiffer, M., and D. C. Spencer: Functionals of finite Riemann surfaces. Princeton Math. Ser. No 16. Princeton Univ. Press 1954. — [17] Bochner, S.: Green-Goursat Theorem. Math. Z. **63**, 230 (1955). — [18] Nevanlinna, R.: Über fast konforme Abbildungen. Ann. Acad. Sci. Fenn. A (I) 251/7. Helsinki 1958. — [19] Hölder, E.: Fortsetzung Abelscher Differentiale 1. Gattung ins Nichtlineare. Ann. Acad. Sci. Fenn. A (I) 250/15. Helsinki 1958. — [20] Bergmann, S.: On multivalued solutions of linear partial differential equations. Contrib. Theory Part. Diff. Equat. Annals of Math. Studies, No. 33. Princeton 1954. — [21] Bers, L.: Function-theoretical properties of solutions of part. diff. equat. of elliptic type, ebenda S. 69. Dort auch weitere Literaturhinweise. — [22] Beckert, H.: Existenzbeweise mehrdim. regulärer Variationsprobleme. Math. Ann. **133**, 191—218 (1957). — [23] Carleman, T.: Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles a deux variables indépendants. Ark. Mat. Astr. Fys. **26** B, 17 (1939). 9 S. — [24] Hölder, E.: Das Eigenwertproblem der Variationsrechnung zweifacher Extremalintegrale. Ber. Math. Tagung Berlin (1953), 291—302. — [25] Bers, L.: Existence and uniqueness of a subsonic compressible flow past a given profile. Comm. Pure and Appl. Math. **7**, 441—514 (1954). — [26] Proceedings of the international colloquium on the theory of functions. Helsinki 1957. — [27] Herglotz, G.: Über die analytische Fortsetzung des Potentials ins Innere der anziehenden Massen. Schriften der Jablonowski-Ges. Leipzig 1914. — [28] Lichtenstein, L.: Zur Theorie der konformen Abbildung. Konforme Abbildung nichtanalytischer singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete. Bull. Ac. Sci. Cracovie, A **1916**, 192—217. — [29] Wintner, A.: Remarks on binary Riemannian metrics. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **5**, 1—14 (1956). — [30] Ahlfors, L. V.: On quasiconformal mappings. J. d'analyse Math. **3**, 1—58 (1953/54).

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 31. März 1959)

Walfisz, A.
Math. Zeitschr. 72, 259—278 (1960)

Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden

Zum Gedenken an Leon Lichtenstein

Von

Arnold Walfisz

§ 1. Einleitung

Im folgenden bezeichnen die Buchstaben a, b, c, h, l, m, X ganze Zahlen; j, k, n, q, r, M, N positive ganze Zahlen; α nichtnegative ganze Zahlen; s, t, Y positive Zahlen; v, y, V, Z, σ reelle Zahlen; w, z komplexe Zahlen. Ferner sei $x \geqq 3$, $0 < \varepsilon < 1$. Diese Buchstaben werden nötigenfalls mit Indizes oder Strichen versehen.

$Q = Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sei eine positiv definite quaternäre quadratische Form mit rationalen Koeffizienten; D ihre Determinante; $A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte (m_1, m_2, m_3, m_4), die dem Ellipsoid $Q \leqq x$ angehören; $\mathsf{P}_Q(x)$ der entsprechende Gitterrest, d. h. $A_Q(x)$ weniger das Volumen $\frac{\pi^2 x^2}{2\sqrt{D}}$ des Ellipsoids.

$\zeta(z) = \zeta(\sigma + iy)$ ist die Riemannsche Zetafunktion; $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen bis x;

$$\Pi(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y};$$

$\sigma(n)$ die Teilersumme von n [$\zeta(z)$, $\Pi(x)$ und $\sigma(n)$ kommen nur in dieser Einleitung vor].

Mit B werden unterschiedslos Zahlen bezeichnet, deren absolute Beträge unterhalb von Schranken liegen, die nur von N abhängen dürfen. Die Zahl N wird am Schlusse der vorliegenden Arbeit in Abhängigkeit von der quadratischen Form Q gebracht. In § 2 kommt N nicht vor und die B-Schranken sind absolute Konstanten. Dasselbe gilt für diejenigen Formeln der Einleitung, in denen Q nicht vorkommt. In den auf $\mathsf{P}_Q(x)$ bezugnehmenden Formeln hängt die B-Schranke von Q ab, in (9) und (10) von ε. Mit C werden unterschiedslos positive absolute Konstanten bezeichnet (nur in dieser Einleitung).

Falls untere Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins. Um komplizierte Exponenten zu vermeiden, setze ich

$$e^{2\pi i y} = e(y), \qquad e^y = \exp(y).$$

Weitere Bezeichnungen werden noch eingeführt.

Die Restfunktion $\mathsf{P}_Q(x)$ habe ich schon wiederholt nach oben abgeschätzt ([8, 9, 11]). Das beste Ergebnis, nämlich

$$\mathsf{P}_Q(x) = B\,x\log^{\frac{3}{4}}x\,(\log\log x)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

erhielt ich in [11] mit Hilfe eines Satzes von L. K. HUA ([1], 172; vgl. auch [10], 81, Hilfssatz 5 und die Bemerkung dazu ebenda, 449). Von derselben Schärfe wie (1) sind die Abschätzungen

$$\zeta(1+ix) = B\log^{\frac{3}{4}}x\,(\log\log x)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$\Pi(x) = B\,x\exp\{-C\log^{\frac{4}{7}}x\,(\log\log x)^{-\frac{3}{7}}\}. \tag{3}$$

Auch diese können mit dem Huaschen Satz bewiesen werden; vgl. die Darstellung und Quellenangaben in [11].

Neuerdings hat HUA einen Satz ([3], 155—156) bewiesen, aus dem, wie in [3], 158 angegeben, die Abschätzungen

$$\mathsf{P}_Q(x) = B\,x\log^{\frac{3}{4}}x\,(\log\log x)^{\frac{1}{4}}, \tag{4}$$

$$\zeta(1+ix) = B\log^{\frac{3}{4}}x\,(\log\log x)^{\frac{1}{4}}, \tag{5}$$

$$\Pi(x) = B\,x\exp\{-C\log^{\frac{4}{7}}x\,(\log\log x)^{-\frac{1}{7}}\} \tag{6}$$

folgen. Daß dem so ist, kann man auch aus [11] ersehen. Aus dem in [3] bei HUA bewiesenen Satze ergibt sich nämlich, daß Satz 8 von [11] für

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 1$$

richtig ist. Setzt man diese Werte in die Formeln (150), (76) und (77) von [11] ein, so ergeben sich die Abschätzungen (4)—(6).

In der Arbeit [4] von HUA-WU FONG wird ein Satz von etwas anderer Bauart, aber derselben Schärfe bewiesen (der dortige Satz 7) und aus ihm werden die Abschätzungen (5), (6) hergeleitet.

In der kürzlich (Mai 1958) erschienen Arbeit [12] von WINOGRADOFF wird, unter gewissen Bedingungen, eine Abschätzung der Summe

$$\sum_{m=M}^{M'} m^{-ix}$$

gegeben, aus der die Abschätzungen

$$\zeta(1+ix) = B\log^{\frac{3}{5}}x, \tag{7}$$

$$\Pi(x) = B\,x\exp(-C\log^{\frac{3}{5}}x) \tag{8}$$

folgen. Der zur Behandlung der obigen Summe benötigte Hilfssatz, von der Art des Huaschen Hilfssatzes 1 der vorliegenden Arbeit, wird in [13] bewiesen.

Etwas später (September 1958) erschien die Arbeit [5] von KOROBOFF. Dort wird, wiederum gestützt auf einen Hilfssatz von der Art des Hilfssatzes 1 weiter unten, aber auf eine von der Winogradoffschen verschiedene Art, ein allgemeiner Satz über trigonometrische Summen bewiesen, aus dem die Abschätzungen (7) und (8) folgen. Wie KOROBOFF mitteilt, ergibt sich aus

seinem Satz für jedes ε auch die Abschätzung

$$\sum_{n \leqq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + B x \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} x. \tag{9}$$

Nach einer bekannten Formel von SIERPINSKI (vgl. [10], 24, (24)) folgt hieraus die Abschätzung

$$\mathsf{P}_K(x) = B x \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} x \tag{10}$$

für die vierdimensionale Kugel ($Q = K = y_1^2 + \cdots + y_4^2$). Es scheint, daß aus dem Koroboffschen Satz, darüber hinaus, die Abschätzung

$$\mathsf{P}_Q(x) = B x \log^{\frac{3}{4}} x \tag{11}$$

für alle unsere Q folgt, die an Schärfe den Winogradoff-Koroboffschen Abschätzungen (7) und (8) entspricht; doch habe ich die Rechnungen nicht durchgeführt. Dagegen werde ich zeigen, daß sich die Abschätzung (11) mit der Winogradoffschen Methode ergibt. Der Haupthilfssatz (Hilfssatz 3 weiter unten) wird im nächsten Paragraphen bewiesen. Aus ihm wird in § 3 die Abschätzung (11) hergeleitet.

Es sei noch bemerkt, daß Hilfssatz 4 weiter unten an Schärfe dem Fall

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 0$$

des Hilfssatzes 6.2 von [11] entspricht. Man darf aber diese Werte nicht in die dortige Formel (150) einsetzen, was (11) ergäbe, da sie nicht den Bedingungen (34) von Satz 8 genügen.

§ 2. Der Haupthilfssatz

HILFSSATZ 1. *Es sei* $r \geqq 3$, $Z \geqq 3$,

$$c \geqq \tfrac{1}{4} r(r+1) + \alpha r, \tag{12}$$

$$s = (c!)^2 48^{2c} c^r r^{\frac{r(r-1)}{2}}, \tag{13}$$

$$t_\alpha = \frac{r(r+1)}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)^\alpha, \tag{14}$$

$$C_r(Z) = \sum_{n \leqq Z} e(y_r n^r + \cdots + y_1 n). \tag{15}$$

Dann ist

$$\int_0^1 |C_r(Z)|^{2c} \, dy_1 \ldots dy_r \leqq s^\alpha Z^{2c - \frac{r(r+1)}{2} + t_\alpha} \log^\alpha Z. \tag{16}$$

BEMERKUNG. Hilfssatz 1 ist das Lemma 6.9 von TITCHMARSH [7], 109. Dieses Lemma bildet seinerseits eine Bearbeitung von Theorem 1 bei HUA [2], wo statt (13)

$$s = (7c)^{4c}$$

steht und in (16) der Exponent α von $\log z$ zu verdoppeln ist.

Eine andere Bearbeitung des Huaschen Satzes ist Satz 4.1 von PRACHAR [6], 272, wo in (12) das $>$-Zeichen steht und

$$s = (7c)^{5c}$$

ist.

Hilfssatz 1 wird nur zum Beweise von Hilfssatz 3 weiter unten benötigt. Man könnte Hilfssatz 3 ebensogut mit dem Huaschen Theorem 1 oder dem Pracharschen Hilfssatz 4.1 beweisen; es sind nur einige triviale Änderungen anzubringen. Übrigens wird Hilfssatz 1 in der folgenden gleichwertigen Fassung benutzt:

HILFSSATZ 2. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt; $h_1, \ldots, h_r$ mögen beliebige ganze Zahlen bedeuten. Für die Lösungszahl V des Systems diophantischer Gleichungen*

$$n_1^j + \cdots + n_c^j - n_{c+1}^j - \cdots - n_{2c}^j = h_j \qquad (j = 1, \ldots, r), \tag{17}$$

wenn jedes n_k das Intervall

$$1 \leqq n_k \leqq Z \qquad (k = 1, \ldots, 2c) \tag{18}$$

durchläuft, gilt dann die Ungleichung

$$V \leqq s^{\alpha} Z^{2c - \frac{r(r+1)}{2} + t\alpha} \log^{\alpha} Z. \tag{19}$$

BEWEIS. Setzt man

$$n_1^j + \cdots + n_c^j - n_{c+1}^j - \cdots - n_{2c}^j = m_j,$$

so ist nach (15)

$$|C_r(Z)|^{2c} = \sum_{n_1, \ldots, n_{2c} \leqq Z} e(y_r m_r + \cdots + y_1 m_1),$$

also

$$\begin{cases} \int_0^1 |C_r(Z)|^{2c} e(-y_r h_r - \cdots - y_1 h_1)\, dy_1 \ldots dy_r \\ \qquad = \sum_{n_1, \ldots, n_{2c} \leqq Z} \prod_{j=1}^{r} \int_0^1 e\{y_j(m_j - h_j)\}\, dy_j = V, \end{cases} \tag{20}$$

da jedes Integral rechts nur für $m_j = h_j$ von Null verschieden und alsdann gleich Eins ist.

Aus (20) und (16) folgt (19). Umgekehrt, ergibt sich (16) aus (20), mit $h_1 = \cdots = h_r = 0$, und (19).

HILFSSATZ 3. *Es sei*

$$r \geqq 96, \quad 0 < s \leqq 1, \quad M \leqq M' \leqq 2M, \quad \vartheta = (106\,000\,000\, r^2)^{-1}, \tag{21}$$

$$t^{\frac{1}{r}} \leqq M \leqq t^{\frac{6}{5r}}, \tag{22}$$

$$S = \sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{t}{m+s}\right). \tag{23}$$

Dann ist

$$S = BM^{1-\vartheta}. \tag{24}$$

Beweis. Es sei $R = 8r$. Ferner sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$M \geqq 16R^2; \tag{25}$$

anderenfalls liegt nämlich $M^{-\vartheta}$ oberhalb einer positiven absoluten Konstanten, und die Abschätzung (24) ist dann klar.

Es sei

$$X = [M^{\frac{3}{4}}], \quad Y = [M^{\frac{1}{4}}], \tag{26}$$

$$g = \left[\frac{r}{6}\right], \tag{27}$$

$$b = 9R^2 + \tfrac{1}{4}R(R+1), \tag{28}$$

$$c = 7R^2 + \tfrac{1}{4}R(R+1), \tag{29}$$

$$f(y) = e\left(\frac{t}{y+s}\right) \quad \text{für} \quad y > 0. \tag{30}$$

Ferner werde gesetzt

$$S_q = \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} f(q + mn). \tag{31}$$

Dann ist, wie jetzt gezeigt werden soll,

$$S = (XY)^{-1} \sum_{q=M}^{M'} S_q + BM^{\frac{7}{8}}. \tag{32}$$

Man schreibe die Summe (23) nochmals mit einem anderen Summationsbuchstaben, unter Berücksichtigung von (30), auf:

$$S = \sum_{k=M}^{M'} f(k).$$

Dann soll gezeigt werden, daß

$$\sum_{k=M}^{M'} f(k) = (XY)^{-1} \sum_{q=M}^{M'} \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} f(q + mn) + BM^{\frac{7}{8}}. \tag{33}$$

Es sei

$$M \leqq k \leqq M'. \tag{34}$$

Dann setze man

$$k = q + mn; \quad m = 1, \ldots, X; \quad n = 1, \ldots, Y. \tag{35}$$

Ist dabei

$$k \geqq M + XY, \tag{36}$$

so gehört für alle XY Darstellungen von k in der Gestalt (35) die Zahl q dem Intervall

$$M \leqq q \leqq M' \tag{37}$$

an. Für jedes k mit (36), falls ein solches vorhanden ist, kommt also $f(k)$ links in (33) einmal vor, rechts $(XY)^{-1}XY$-mal, also auch einmal. Werte von k mit (34), für die (36) nicht gilt, gibt es aber höchstens XY, und die über sie erstreckte Summe von $f(k)$ ist nach (30) und (26) dem Modul nach

$$\leqq XY \leqq M^{\frac{7}{8}}.$$

Rechts in (33) kommen alle XY Zahlen (35) vor, für die (37) gilt. Diese Zahlen k gehören dem Intervall (34) an, wenn

$$q \leqq M' - XY$$

ist. Werte von q mit (37), für die diese Ungleichung nicht gilt, gibt es höchstens XY, und die über sie erstreckte Summe

$$(XY)^{-1} \sum_{q} \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} f(q+mn)$$

ist dem Modul nach

$$\leqq (XY)^{-1} XY \cdot XY = XY \leqq M^{\frac{7}{8}},$$

womit (32) nachgewiesen ist.

Gehört k dem Intervall (34) an und hat die Gestalt (35), so ist

$$\frac{t}{k+s} = \frac{t}{q+s+mn} = \frac{t}{q+s} - \frac{tmn}{(q+s)^2}\left(1+\frac{mn}{q+s}\right)^{-1}. \tag{38}$$

Gehört dabei q dem Intervall (37) an, so ist wegen (26)

$$0 < \frac{mn}{q+s} \leqq \frac{XY}{M} \leqq \frac{M^{\frac{7}{8}}}{M} = M^{-\frac{1}{8}}, \tag{39}$$

also wegen (25)

$$\frac{mn}{q+s}\left(1+\frac{mn}{q+s}\right)^{-1} = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1}\left(\frac{mn}{q+s}\right)^h.$$

Setzt man dies in (38) ein, so ergibt sich

$$\frac{t}{k+s} = g(m,n) + g_1(m,n), \tag{40}$$

wobei

$$g(m,n) = \frac{t}{q+s} + \frac{t}{q+s} \sum_{h=1}^{R} (-1)^h \left(\frac{mn}{q+s}\right)^h,$$

$$g_1(m,n) = \frac{t}{q+s} \sum_{h=R+1}^{\infty} (-1)^h \left(\frac{mn}{q+s}\right)^h, \tag{41}$$

also

$$g(m,n) = A_0 + A_1 mn + \cdots + A_R m^R n^R, \tag{42}$$

$$A_0 = t(q+s)^{-1}; \quad A_h = (-1)^h t (q+s)^{-h-1} \qquad (h = 1, \ldots, R). \tag{43}$$

Weiter ist nach (41), (21), (39), (22), (37) und (25)

$$|g_1(m,n)| \leqq \frac{t}{q}\left(\frac{mn}{q+s}\right)^{R+1} \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{mn}{q+s}\right)^h \leqq \frac{M^r}{M} M^{-\frac{1}{8}(R+1)}(1-M^{-\frac{1}{8}})^{-1}$$

$$= M^{-1}(M^{\frac{1}{8}}-1)^{-1} \leqq M^{-1}. \tag{44}$$

Die Summe (31) soll jetzt durch die Summe

$$T_q = \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} e\{g(m,n)\} \tag{45}$$

angenähert werden. Wegen (31), (35), (30), (40), (45), (44) und (26) ist

$$S_q - T_q = \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} \left(e\{g(m,n) + g_1(m,n)\} - e\{g(m,n)\}\right),$$

$$|S_q - T_q| \leqq \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} |1 - e\{g_1(m,n)\}|$$

$$= 2\pi \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} \left| \int_0^{g_1(m,n)} e(y)\,dy \right|$$

$$\leqq 2\pi \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} |g_1(m,n)| \leqq 2\pi X Y M^{-1} \leqq 2\pi M^{-\frac{1}{8}},$$

$$S_q = T_q + B M^{-\frac{1}{8}}. \tag{46}$$

Nach (45) ist

$$|T_q| \leqq \sum_{m=1}^{X} \left| \sum_{n=1}^{Y} e\{g(m,n)\} \right|,$$

und hieraus folgt nach der Hölderschen Ungleichung wegen (42) und (43), wenn c die Zahl (29) ist,

$$|T_q|^{2c} \leqq X^{2c-1} \sum_{m=1}^{X} \left| \sum_{n=1}^{Y} e\{g(m,n)\} \right|^{2c}$$

$$= X^{2c-1} \sum_{m=1}^{X} \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} e\{g(m,n_1) + \cdots + g(m,n_c) -$$

$$- g(m,n_{c+1}) - \cdots - g(m,n_{2c})\},$$

also

$$|T_q|^{2c} \leqq X^{2c-1} \sum_{m=1}^{X} \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} e\,(A_1 m Z_1 + \cdots + A_R m^R Z_R), \tag{47}$$

wobei

$$Z_j = n_1^j + \cdots + n_c^j - n_{c+1}^j - \cdots - n_{2c}^j \quad (j = 1, \ldots, R). \tag{48}$$

Aus (47) ergibt sich weiter, wenn b die Zahl (28) ist,

$$|T_q|^{4bc} \leqq X^{2b(2c-1)} \sum_{m=1}^{X} \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} e(A_1 m Z_1 + \cdots + A_R m^R Z_R)^{|2b}. \tag{49}$$

Hier ist nach der Hölderschen Ungleichung

$$|\,|^{2b} = \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} \left| \sum_{m=1}^{X} e(\,) \right| \leqq \left(\sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} 1 \right)^{2b-1} \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} \left| \sum_{m=1}^{X} e(\,) \right|^{2b}$$

$$= Y^{2c(2b-1)} \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} \sum_{m_1,\ldots,m_{2b}=1}^{X} e(W), \tag{50}$$

wo

$$W = A_1 m_1 Z_1 + \cdots + A_R m_1^R Z_R + A_1 m_2 Z_1 + \cdots + A_R m_2^R Z_R + \\ + \cdots + A_1 m_b Z_1 + \cdots + A_R m_b^R Z_R - A_1 m_{b+1} Z_1 - \cdots - \\ - A_R m_{b+1}^R Z_R - \cdots - A_1 m_{2b} Z_1 - \cdots - A_R m_{2b}^R Z_R.$$

Setzt man daher

$$X_j = m_1^j + \cdots + m_b^j - m_{b+1}^j - \cdots - m_{2b}^j \qquad (j = 1, \ldots, R), \tag{51}$$

so wird

$$W = A_1 Z_1 X_1 + \cdots + A_R Z_R X_R,$$

folglich nach (49) und (50)

$$|T_q|^{4bc} \leqq X^{2b(2c-1)} Y^{2c(2b-1)} \sum_{n_1, \ldots, n_{2c}=1}^{Y} \sum_{m_1, \ldots, m_{2b}=1}^{X} e(A_1 Z_1 X_1 + \cdots + A_R Z_R X_R). \tag{52}$$

Hierbei durchlaufen nach (51) die ganzen Zahlen X_j gewisse Zahlen h_j des Intervalls

$$-bX^j < h_j \leqq bX^j \qquad (j = 1, \ldots, R). \tag{53}$$

Bedeuten $h_1, \ldots, h_R$ irgendwelche feste Zahlen der Intervalle (53), so betrachte man das Gleichungssystem

$$X_1 = h_1, \ldots, X_R = h_R \tag{54}$$

in $m_1, \ldots, m_{2b}$. Um die Lösungszahl V dieses Systems abzuschätzen, wenn jedes m_k das Intervall

$$1 \leqq m_k \leqq X \qquad (k = 1, \ldots, 2b) \tag{55}$$

durchläuft, werde Hilfssatz 2 mit

$$c = b, \qquad r = R, \qquad \alpha = 9R, \qquad Z = X$$

angewendet. Wegen (28) ist dann die Ungleichung (12) erfüllt und wegen (21,) (25), (26) ist $Z \geqq 3$, wie es sich gehört. Setzt man daher

$$R_1 = (b!)^2 48^{2b} b^R R^{\frac{1}{2}R(R-1)}, \qquad R_2 = R_1^{9R}, \tag{56}$$

$$t = \tfrac{1}{2} R(R+1)(1 - R^{-1})^{9R}, \tag{57}$$

$$F = F(X) = X^{2b - \frac{1}{2}R(R+1) + t} \log^{9R} X, \tag{58}$$

so ist, mit Rücksicht auf (14),

$$V \leqq R_2 F. \tag{59}$$

Nach (52) ist

$$|T_q|^{4bc} \leqq X^{2b(2c-1)} Y^{2c(2b-1)} \sum_{m_1, \ldots, m_{2b}=1}^{X} \Big| \sum_{n_1, \ldots, n_{2c}=1}^{Y} e(A_1 Z_1 X_1 + \cdots + A_R Z_R X_R) \Big|, \tag{60}$$

wobei die Z_j durch (48) und die X_j durch (51) gegeben sind.

Sind die h_j feste Zahlen der Intervalle (53) und durchlaufen die m_k die Intervalle (55), so genügt die Lösungszahl V' des Gleichungssystems (54) der Ungleichung (59) mit (56). Aus (60) folgt daher

$$(61)\qquad \begin{cases} |T_q|^{4bc} \leqq X^{2b(2c-1)}\, Y^{2c(2b-1)}\, R_2 F \times \\ \qquad \times \sum\limits_{h_1,\ldots,h_R} \Big| \sum\limits_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} e(A_1 Z_1 h_1 + \cdots + A_R Z_R h_R) \Big|, \end{cases}$$

wobei jetzt $h_1, \ldots, h_R$ die Intervalle (53) durchlaufen.

Ein Intervall (53) enthält $2bX^j$ Zahlen h_j. Aus (61) ergibt sich mittels der Schwarzschen Ungleichung

$$(62)\qquad \begin{cases} |T_q|^{8bc} \leqq X^{4b(2c-1)}\, Y^{4c(2b-1)}\, R_2^2 F^2 (2b)^R\, X^{\frac{1}{2}R(R+1)} \times \\ \qquad \times \sum\limits_{h_1,\ldots,h_R} \sum\limits_{n_1,\ldots,n_{1c}=1}^{Y} e(A_1 Z_1' h_1 + \cdots + A_R Z_R' h_R), \end{cases}$$

wobei wegen (48)

$$(63)\qquad Z_j' = n_1^j + \cdots + n_{2c}^j - n_{2c+1}^j - \cdots - n_{4c}^j \qquad (j = 1, \ldots, R).$$

Hier nehmen die Z_j' gewisse Werte l_j an, die den Intervallen

$$(64)\qquad -2c\,Y^j < l_j \leqq 2c\,Y^j \qquad (j = 1, \ldots, R)$$

angehören.

Bedeuten $l_1', \ldots, l_R'$ irgendwelche feste Zahlen, so betrachte man das Gleichungssystem

$$n_1^j + \cdots + n_c^j - n_{2c+1}^j - \cdots - n_{3c}^j = l_j' \qquad (j = 1, \ldots, R).$$

Um die Lösungszahl V' dieses Systems abzuschätzen, wenn jedes n_k das Intervall

$$(65)\qquad 1 \leqq n_k \leqq Y$$

durchläuft, werde Hilfssatz 2 mit

$$c = c, \qquad r = R, \qquad \alpha = 7R, \qquad Z = Y$$

angewendet. Wegen (29) ist dann die Ungleichung (12) erfüllt und wegen (21), (25), (26) ist $Z \geqq 3$, wie es sich gehört. Setzt man daher

$$(66)\qquad R_3 = (c!)^2\, 48^{2c}\, c^R\, R^{\frac{1}{2}R(R-1)}, \qquad R_4 = R_3^{7R},$$

$$(67)\qquad t' = \tfrac{1}{2} R(R+1)\,(1 - R^{-1})^{7R},$$

$$(68)\qquad G = G(Y) = Y^{2c - \frac{1}{2}R(R+1) + t'} \log^{7R} Y,$$

so ist, mit Rücksicht auf (14),

$$(69)\qquad V' \leqq R_4 G.$$

Dies läßt sich auch so ausdrücken: Es seien $l_1, \ldots, l_R$ und

$$(70)\qquad n_{c+1}, \ldots, n_{2c}, n_{3c+1}, \ldots, n_{4c}$$

irgendwelche feste Zahlen; Z_j' durch (63) definiert; V' die Lösungszahl des Gleichungssystems

$$Z_1' = l_1, \ldots, Z_R' = l_R \tag{71}$$

in den Zahlen

$$n_1, \ldots, n_c, n_{2c+1}, \ldots, n_{3c},$$

wenn diese die Intervalle (65) durchlaufen. Dann gilt die Ungleichung (69) mit dem Wert (66).

Läßt man jetzt jede der Zahlen (70) das Intervall (65) durchlaufen, so erhält man Y^{2c} Systeme (70). Sind daher $l_1, \ldots, l_R$ fest gegeben und bezeichnet V'' die Lösungszahl des Systems (71) in $n_1, \ldots, n_{4c}$, wenn diese Zahlen die Intervalle (65) durchlaufen, so ist

$$V'' \leqq R_4 Y^{2c} G. \tag{72}$$

Ist das Gleichungssystem (71) in $n_1, \ldots, n_{4c}$ lösbar, so müssen die l_j, wie schon oben bemerkt wurde, den Intervallen (64) angehören. Läßt man jetzt jedes l_j die $4c\,Y^j$ Zahlen des zugehörigen Intervalls (64) durchlaufen, so folgt aus (62) und (72)

$$|T_q|^{8bc} \leqq X^{4b(2c-1)}\, Y^{4c(2b-1)}\, R_2^2 F^2 (2b)^R\, X^{\frac{1}{2}R(R+1)}\, R_4 G\, Y^{2c} C, \tag{73}$$

wobei

$$C = \sum_{h_1, \ldots, h_R} \sum_{l_1, \ldots, l_R} e(A_1 l_1 h_1 + \cdots + A_R l_R h_R). \tag{74}$$

Aus (73), (58) und (68) ergibt sich

$$|T_q|^{8bc} \leqq X^{4b(2c-1)}\, Y^{4c(2b-1)}\, R_2^2\, X^{4b-R(R+1)+2t} \log^{18R} X \times$$
$$\times (2b)^R\, X^{\frac{1}{2}R(R+1)}\, R_4\, Y^{4c-\frac{1}{2}R(R+1)+t'} C \log^{7R} Y.$$

Wegen (26) ist also

$$|T_q|^{8bc} \leqq R_2^2 R_4 (2b)^R (XY)^{8bc-\frac{1}{2}R(R+1)}\, X^{2t}\, Y^{t'} C \log^{25R} M. \tag{75}$$

Um C abzuschätzen, setze man in (74)

$$C = C_1 + C_2; \tag{76}$$

hierbei bezeichne C_1 denjenigen Teil von (74), worin in der l-Summe die zusätzliche Bedingung gestellt wird: Ist g durch (27) definiert, so mögen unter den Zahlen

$$l_{r+g+1}, \ldots, l_{r+g+2r} \tag{77}$$

mindestens r gleich Null sein; in C_2 mögen dagegen mehr als r Zahlen (77) von Null verschieden sein.

1. ABSCHÄTZUNG VON C_1. Es sei

$$P = \prod_{j=1}^{R} (4c\,Y^j) = (4c)^R\, Y^{\frac{1}{2}R(R+1)}. \tag{78}$$

Ferner setze man

$$T' = \sum_{l_1, \ldots, l_R}' 1; \tag{79}$$

hierbei möge jedes l_j das zugehörige Intervall (64) durchlaufen, und der Strich am Summenzeichen deute an, daß unter den Zahlen (77) mindestens r gleich Null sein sollen.

Aus (74), (79) und der Definition von C_1 ergibt sich

$$|C_1| \leqq T' \sum_{h_1, \ldots, h_R} 1.$$

Da hierbei jedes h_j die $2bX^j$ Zahlen des zugehörigen Intervalls (53) durchläuft, ist mithin

$$|C_1| \leqq (2b)^R X^{\frac{1}{2}R(R+1)} T'. \tag{80}$$

Durch die der Summe (79) auferlegte Bedingung werden die Zahlen

$$l_1, \ldots, l_{r+g}, l_{3r+g+1}, \ldots, l_R$$

nicht betroffen. Bezeichnet daher P_1 die Anzahl der Systeme (77) mit der angegebenen Beschränkung, so hat man

$$T' = P_1 \prod_{j=1}^{r+g} (4c\,Y^j) \prod_{j=3r+g+1}^{R} (4c\,Y^j). \tag{81}$$

Weiter bezeichne P_2 die Anzahl der Systeme (77), bei denen an r fest gegebenen Stellen Nullen stehen. Da die Länge $4c\,Y^j$ eines Intervalls (64) mit zunehmenden j wächst, so ist

$$P_2 \leqq \prod_{j=r+g+r+1}^{r+g+2r} (4c\,Y^j),$$

$$P_1 \leqq \binom{2r}{r} \prod_{j=2r+g+1}^{3r+g} (4c\,Y^j),$$

und daher nach (81) und (78)

$$T' \leqq \binom{2r}{r} \prod_{j=1}^{r+g} (4c\,Y^j) \prod_{j=2r+g+1}^{R} (4c\,Y^j) = \binom{2r}{r} \prod_{j=1}^{R} (4c\,Y^j) \prod_{j=r+g+1}^{2r+g} (4c\,Y^j)^{-1}$$

$$\leqq (2r)^r P Y^{-(r+g+1)r}. \tag{82}$$

Nach (26) und (27) ist

$$Y^{-(r+g+1)r} = \left[M^{\frac{1}{8}}\right]^{-\left(r+\left[\frac{r}{6}\right]+1\right)r} \leqq \left[M^{\frac{1}{8}}\right]^{-\frac{7r^2}{6}}$$

$$\leqq \left(\tfrac{1}{2} M^{\frac{1}{8}}\right)^{-\frac{7r^2}{6}} \leqq 2^{2r^2} M^{-\frac{r^2}{7}}. \tag{83}$$

Aus (80), (82), (78) und (83) ergibt sich

$$|C_1| \leqq (2b)^R X^{\frac{1}{2}R(R+1)} (2r)^r (4c)^R Y^{-\frac{1}{2}R(R+1)} 2^{2r^2} M^{-\frac{r^2}{7}}.$$

Setzt man daher

$$R_5 = (8bc)^R (2r)^r 2^{R^2}, \tag{84}$$

so ist

$$|C_1| \leqq R_5 (XY)^{\frac{1}{2}R(R+1)} M^{-\frac{r^2}{7}}. \tag{85}$$

2. ABSCHÄTZUNG VON C_2. In C_2 gibt es unter den Zahlen (77) mehr als r von Null verschiedene. Ist l_j eine von ihnen, so gilt nach (27)

$$j \geqq r + g + 1 \geqq \frac{7r}{6}. \tag{86}$$

Ferner ist nach (29)

$$c \leqq 8R^2. \tag{87}$$

Aus (43), (64), (22), (37), (26), (25), (21), (86) und (87) ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 < |A_j l_j| &\leqq t q^{-j-1} 2c Y^j \leqq 16 R^2 M^{r-j-1+\frac{j}{8}} \\ &\leqq M^{r-\frac{7j}{8}} \leqq M^{-\frac{r}{48}} \leqq M^{-2} \leqq \tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{88}$$

Es werde jetzt

$$W_j = \Big| \sum_{h_j} e(A_j l_j h_j) \Big| \quad (j = 1, \ldots, R) \tag{89}$$

gesetzt, wobei h_j, wie in (74), das zugehörige Intervall (53) durchläuft. Ist nun wieder l_j eine von Null verschiedene Zahl (77), so ist nach (89) und (88)

$$W_j \leqq |\operatorname{cosec} \pi A_j l_j| \leqq (2 |A_j l_j|)^{-1} \leqq |A_j|^{-1}.$$

Hieraus ergibt sich wegen (43), (21), (26), (22), (37)

$$\begin{aligned} W_j X^{-j} &\leqq |A_j|^{-1} X^{-j} \leqq t^{-1} (q+1)^{j+1} \left(\tfrac{1}{2} M^{\frac{3}{4}}\right)^{-j} \\ &\leqq M^{-\frac{5r}{6}} (2q)^{j+1} 2^j M^{-\frac{3j}{4}} \leqq M^{-\frac{5r}{6}} 2^{2j+2} M^{j+1} 2^j M^{-\frac{3j}{4}} \\ &= 2^{3j+2} M^{\frac{j}{4} - \frac{5r}{6} + 1}. \end{aligned}$$

Nach (77) und (27) ist hier

$$j \leqq 3r + \frac{r}{6} = \frac{19r}{6}.$$

Wegen (21) ist somit

$$W_j X^{-j} \leqq 2^{2R} M^{\frac{19r}{24} - \frac{20r}{24} + \frac{r}{96}} = 2^{2R} M^{-\frac{r}{32}},$$

d. h.

$$\frac{W_j}{2bX^j} \leqq W_j X^{-j} \leqq 2^{2R} M^{-\frac{r}{32}}. \tag{90}$$

Nach Definition ist

$$C_2 = \sum_{l_1, \ldots, l_R}'' \sum_{h_1, \ldots, h_R} e(A_1 l_1 h_1 + \cdots + A_R l_R h_R);$$

dabei durchläuft jedes l_j das zugehörige Intervall (64), jedoch mit der Einschränkung, daß unter den Zahlen (77) mehr als r von Null verschieden sind; jedes h_j durchläuft das zugehörige Intervall (53). Wegen (89) ist daher

$$|C_2| \leqq \sum_{l_1,\ldots,l_R}'' W_1 \ldots W_R. \tag{91}$$

Ein Intervall (53) enthält $2bX^j$ ganze Zahlen. Daher lautet die triviale Abschätzung für die Summe (89)

$$W_j \leqq 2bX^j \qquad (j=1,\ldots,R). \tag{92}$$

Nach Voraussetzung gilt für gewisse r Ausdrücke W_j in (91) die Ungleichung (90); für die übrigen $R-r$ gilt (92). Somit ist

$$|C_2| \leqq 2^{2rR} M^{-\frac{r^2}{32}} \sum_{l_1,\ldots,l_R} 1 \cdot \prod_{j=1}^{R} (2bX^j),$$

wobei jetzt jedes l_j das zugehörige Intervall (64) von $4cY^j$ Zahlen durchläuft. Daher ist

$$|C_2| \leqq 2^{2rR} M^{-\frac{r^2}{32}} (4c)^R Y^{\frac{1}{2}R(R+1)} (2b)^R X^{\frac{1}{2}R(R+1)},$$

d. h.

$$|C_2| \leqq (8bc)^R 2^{R^2} (XY)^{\frac{1}{2}R(R+1)} M^{-\frac{r^2}{32}}. \tag{93}$$

Wegen (76), (85), (84) und (93) ist

$$C \leqq 2R_5 (XY)^{\frac{1}{2}R(R+1)} M^{-\frac{r^2}{32}}.$$

In Verbindung mit (75) ergibt dies

$$|T_q|^{8bc} \leqq 2R_2^2 R_4 R_5 (2b)^R (XY)^{8bc} X^{2t} Y^{t'} M^{-\frac{r^2}{32}} \log^{25} M. \tag{94}$$

Aus (56), (28), (29) und (21) folgt

$$R_1 \leqq b^{2b} b^{2b} b^{2b} b^{2b} = b^{8b}, \qquad R_2 \leqq b^{72bR},$$

$$R_2^{\frac{2}{8bc}} \leqq b^{\frac{18R}{c}} \leqq (10R^2)^{\frac{18R}{7R^2}} = BR^{\frac{6}{R}} = B. \tag{95}$$

Wegen $c \leqq b$ ergibt sich aus (56) und (66), daß $R_4 \leqq R_2$ ist. Wegen (95) ist somit

$$R_4^{\frac{1}{8bc}} = B.$$

Weiter folgt aus (84), daß auch

$$\{2R_5(2b)^R\}^{\frac{1}{8bc}} = B.$$

Wegen (94) ist somit

$$T_q = BXY\left(X^{2t} Y^{t'} M^{-\frac{r^2}{32}} \log^{25} M\right)^{\frac{1}{8bc}}. \tag{96}$$

Weiter ist

$$(1-R^{-1})^{9R} = \exp\{9R\log(1-R^{-1})\} \leqq e^{-9},$$

$$(1-R^{-1})^{7R} \leqq e^{-7}.$$

Wegen (57), (67), (26) und (21) ist daher

$$R(R+1) \leqq R\left(R+\frac{R}{8\cdot 96}\right) = \frac{769\cdot 64}{8\cdot 96}r^2 \leqq 65r^2, \tag{97}$$

$$2t \leqq R(R+1)\,e^{-9} \leqq 65\,e^{-9}r^2,$$

$$t' \leqq \tfrac{1}{2}R(R+1)\,e^{-7} \leqq 33\,e^{-7}r^2,$$

$$X^{2t}Y^{t'} \leqq M^{\sigma};\quad \sigma = \left(\frac{3}{4}\cdot 65\,e^{-9} + \frac{1}{8}\cdot 33\,e^{-7}\right)r^2 \leqq \frac{r^2}{100},$$

$$\log^{25R} M = \log^{200r} M = B\,M^{r^2\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)},$$

$$X^{2t}Y^{t'}M^{-\frac{r^2}{32}}\log^{25R} M = B\,M^{-\frac{r^2}{48}}.$$

Ferner ist nach (28), (29) und (97)

$$b \leqq (9\cdot 64+17)r^2 = 593r^2,$$

$$c \leqq (7\cdot 64+17)r^2 = 465r^2,$$

$$48\cdot 8bc \leqq 48\cdot 8\cdot 593\cdot 465r^4 \leqq 106\cdot 10^6 r^4.$$

Wegen (96) ist daher

$$T_q = B\,X\,Y\,M^{-(106\cdot 10^6 r^2)^{-1}},$$

und somit nach (46)

$$S_q = B\,X\,Y\,M^{-(106\cdot 10^6 r^2)^{-1}}.$$

In Verbindung mit (32) und (21) ergibt dies die Behauptung (24) des Hilfssatzes.

§ 3. Beweis der Abschätzung (11)

In diesem Paragraphen sei N eine natürliche Zahl, die später in Abhängigkeit von der quadratischen Form Q der Determinante D gebracht wird. Die B-Schranken dürfen von Q, insbesondere von N abhängen. x liege oberhalb solcher Schranken; a und b seien natürliche Zahlen $\leqq N$. In Summen, die nach m laufen, soll Σ' andeuten, daß m neben anderen Bedingungen die Kongruenz $m \equiv a \pmod N$ zu erfüllen hat. $\psi(y)$ sei die Funktion

$$\psi(y) = y - [y] - \tfrac{1}{2}. \tag{98}$$

Es soll gezeigt werden, daß aus Hilfssatz 3 die Abschätzung (11) folgt. Aus der Richtigkeit von (11) für Formen Q mit ganzzahligen Koeffizienten folgt diese Abschätzung, durch einen trivialen Übergang, auch für Formen mit rationalen Koeffizienten. Daher sollen die Koeffizienten von Q, mit Rücksicht auf die aus [8] heranzuholenden Resultate, als ganzzahlig vorausgesetzt werden. Dem Beweise von (11) sollen zwei Hilfssätze vorausgeschickt werden.

Hilfssatz 4. *Es sei*

$$96 \leqq r \leqq 10^{-3} \log^{\frac{1}{3}} x, \qquad \varrho = 10^{-8} r^{-3}, \tag{99}$$

$$T_r = \sum_{N x^{\frac{7}{6r}} < m \leqq N x^{\frac{7}{6(r-1)}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{n}\right). \tag{100}$$

Dann ist

$$T_r = B r^{-5} x^{-\varrho} \log^2 x. \tag{101}$$

Beweis. Wegen

$$T_r = B \sum_{m \leqq N x^{\frac{7}{6(r-1)}}} \frac{1}{m} = B \frac{\log x}{r}$$

ist $T_r = B$ für $x < (3N)^{50r}$. Mithin sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$x \geqq (3N)^{50r}. \tag{102}$$

Für $Y \geqq 3$ ergibt nach (98) eine Fourier-Entwicklung

$$Y \int_0^{\pm 1/Y} \psi(y+v)\, dv = \sum_{c=-\infty}^{\infty} w_c e(cy), \tag{103}$$

wo

$$w_0 = 0, \quad w_c = -\frac{Y}{2\pi i c} \int_0^{\pm 1/Y} e(cv)\, dv \qquad (c \neq 0),$$

also

$$w_0 = 0; \quad |w_c| \leqq \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|c|}, \frac{Y}{c^2}\right) \quad (c \neq 0). \tag{104}$$

Es sei

$$x^{\frac{7}{6r}} < M \leqq M' \leqq 2M \leqq 2x^{\frac{7}{6(r-1)}}, \tag{105}$$

$$z = \frac{NM^r}{x}. \tag{106}$$

Aus (103) und (104) folgt

$$Y \left| \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_0^{\pm 1/Y} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + v\right) dv \right| \leqq 2 \sum_{c=1}^{\infty} \left| \sum_{m=NM}^{NM'}{}' e\left(\frac{cx}{m}\right) \right| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{c}, \frac{Y}{c^2}\right) \tag{107}$$

$$= 2 \sum_{c \leqq z} + 2 \sum_{c > z} = 2S_1 + 2S_2, \tag{108}$$

zur Abkürzung. In S_1 nehme man

$$\frac{cx}{N} = t. \tag{109}$$

Dann ist mit $s=\frac{a}{N}$ (also $0<s\leqq 1$)

$$(110)\qquad \left|\sum_{m=NM}^{NM'}{}' e\left(\frac{cx}{m}\right)\right| = \left|\sum_{\substack{m=NM\\ m\equiv a \pmod N}}^{NM'} e\left(\frac{cx}{m}\right)\right| \leqq \left|\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{cx}{Nm+a}\right)\right| + 2,$$

d. h.

$$(111)\qquad \left|\sum_{m=NM}^{NM'}{}' e\left(\frac{cx}{m}\right)\right| \leqq \left|\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{t}{m+s}\right)\right| + 2.$$

Weiter ist in S_1 nach (106), (108) und (109)

$$(112)\qquad M' = \frac{zx}{N} \geqq \frac{cx}{N} = t.$$

Nach (99) ist $r\geqq 96$, also

$$(113)\qquad \left(1-\frac{1}{50r}\right)\frac{6}{5r} \geqq \frac{7}{6(r-1)}.$$

Nach (109), (108), (102) und (113) ist in S_1

$$t^{\frac{6}{5r}} = \left(\frac{cx}{N}\right)^{\frac{6}{5r}} \geqq \left(\frac{x}{N}\right)^{\frac{6}{5r}} \geqq x^{\left(1-\frac{1}{50r}\right)\frac{6}{5r}} \geqq x^{\frac{7}{6(r-1)}},$$

also nach (105)

$$(114)\qquad t^{\frac{6}{5r}} \geqq M.$$

Wegen (99), (112), (114) und (105) sind die Voraussetzungen (21) und (22) von Hilfssatz 3 erfüllt. Für die rechts in (111) stehende Summe (23) gilt daher die Abschätzung (24) mit dem t aus (109), dem ϑ aus (21) und $s=\frac{a}{N}$. Es ist somit

$$\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{cx}{Nm+a}\right) = BM^{1-\vartheta},$$

d. h. nach (110) in S_1

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' e\left(\frac{cx}{m}\right) = BM^{1-\vartheta}.$$

Ferner ist

$$\sum_{c\leqq z} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{c}, \frac{Y}{c^2}\right) = B\sum_{c\leqq Y}\frac{1}{c} + BY\sum_{c>Y}\frac{1}{c^2} = B\log Y.$$

Wegen (108) ist daher

$$(115)\qquad S_1 = BM^{1-\vartheta}\log Y.$$

In S_2 benutze ich für die m-Summe die triviale Abschätzung BM und erhalte wegen (107), (108) und (106)

$$(116)\qquad S_2 = BMY\sum_{c>z}\frac{1}{c^2} = B\frac{MY}{z} = BM^{1-r}Yx.$$

Aus (107), (108), (115) und (116) folgt wegen $Y \geqq 3$

$$Y \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_0^{\pm 1/Y} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + v\right) dv = B(M^{1-\vartheta} + M^{1-r} Y x) \log Y.$$

Da für jedes Zahlenpaar y_1 und $y_2 > y_1$ wegen (98) die Ungleichung

$$\psi(y_2) - \psi(y_1) \leqq y_2 - y_1$$

besteht, ist

$$-\frac{M' - M + 1}{2Y} + Y \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_0^{1/Y} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + v\right) dv \leqq \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right)$$

$$\leqq \frac{M' - M + 1}{2Y} + Y \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_{-1/Y}^{0} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + v\right) dv.$$

Wegen $0 < M' - M + 1 \leqq 2M$ ist somit

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) = B(M^{1-\vartheta} + M^{1-r} Y x + M Y^{-1}) \log Y.$$

Durch partielle Summation folgt hieraus

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) = B(M^{-\vartheta} + M^{-r} Y x + Y^{-1}) \log Y. \tag{117}$$

Hierin darf wegen (99)

$$Y = x^{r-3} \tag{118}$$

angenommen werden, weil dann $Y \geqq 3$ ist. Aus (118), (99) und (21) ergibt sich

$$\log Y = r^{-3} \log x, \qquad M^{-\vartheta} = B x^{-\frac{7\vartheta}{6r}} = B x^{-\varrho},$$

$$M^{-r} Y x = B x^{-\frac{7}{6} + \frac{1}{2} + 1} = B x^{-\frac{1}{3}} = B x^{-\varrho},$$

$$Y^{-1} = B x^{-r+3} = B x^{-\varrho}.$$

Wegen (117) ist somit

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) = B r^{-3} x^{-\varrho} \log x. \tag{119}$$

Das Summationsintervall von (100) zerfällt in $B r^{-2} \log x$ Teilintervalle der Gestalt $NM \leqq m \leqq NM'$ und B lose Glieder, wobei M und M' den Bedingungen (105) genügen. Nach (100), (99) und (119) ist also

$$T_r = B r^{-2} \log x \cdot r^{-3} x^{-\varrho} \log x,$$

d. h. (101) erfüllt.

Hilfssatz 5. *Für*

$$T = \sum_{m \leqq N x}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) \tag{120}$$

ist

$$T = B \log^{\frac{2}{3}} x. \tag{121}$$

BEWEIS. Es sei

$$r_0 = [10^{-3} \log^{\frac{1}{3}} x], \qquad r_1 = 7[\tfrac{1}{12} \log\log x] + 8, \tag{122}$$

$$X = 12[\tfrac{1}{12} \log\log x] + 8. \tag{123}$$

Dabei werde von vornherein x so groß angenommen, daß $r_0 > r_1 \geqq 96$ ist. Ferner werde

$$T = S_3 + S_4 + S_5 \tag{124}$$

gesetzt, wobei

$$S_3 = \sum_{m \leqq N x^{\frac{2}{X+4}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right), \tag{125}$$

$$S_4 = \sum_{N x^{\frac{2}{X+4}} < m \leqq N x^{\frac{1}{2}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right), \tag{126}$$

$$S_5 = \sum_{N x^{\frac{1}{2}} < m \leqq N x}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right). \tag{127}$$

Nach (122) und (123) ist

$$\frac{2}{X+4} = \frac{7}{6(r_1 - 1)}.$$

Wegen (125) und (100) ist somit

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{m \leqq N x^{\frac{7}{6(r_1-1)}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) \\ &= \sum_{m \leqq N x^{\frac{7}{6 r_0}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) + \sum_{r=r_1}^{r_0} T_r. \end{aligned} \tag{128}$$

Wegen (122) ist offenbar

$$\sum_{m \leqq N x^{\frac{7}{6 r_0}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) = B \sum_{m \leqq N x^{\frac{7}{6 r_0}}} \frac{1}{m} = B \frac{\log x}{r_0} = B \log^{\frac{2}{3}} x. \tag{129}$$

Für die Summe (100) gilt die Abschätzung (101). Daher ist wegen (99)

$$T_r = B r^{-5} \exp(-10^{-8} r^{-3} \log x) \log^2 x \qquad (r_1 \leqq r \leqq r_0).$$

Die hier stehende Funktion von r nimmt mit wachsendem r zu. Setzt man nämlich

$$f(y) = y^{-5} \exp(-10^{-8} y^{-3} \log x) \qquad (r_1 \leqq y \leqq r_0),$$

so ist

$$f'(y) = y^{-1} f(y) \left(3 \cdot 10^{-8} y^{-3} \log x - 5\right) > 0,$$

da nach (122)

$$3 \cdot 10^{-8} y^{-3} \log x \geqq 3 \cdot 10^{-8} r_0^{-3} \log x \geqq 3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^9 = 30.$$

Man hat daher

$$\sum_{r=r_1}^{r_0} T_r = B r_0 \cdot r_0^{-5} \exp\left(-10^{-8} r_0^{-3} \log x\right) \log^2 x$$

$$= B \log^{-\frac{4}{3}} x \exp\left(-10^{-8+9}\right) \log^2 x = B \log^{\frac{2}{3}} x. \tag{130}$$

Aus (128)—(130) folgt

$$S_3 = B \log^{\frac{2}{3}} x. \tag{131}$$

Nun soll die Summe (126) abgeschätzt werden. Sie wird folgendermaßen in Teilsummen zerlegt:

$$S_4 = \sum_{r=1}^{X} U_r,$$

$$U_r = \sum_{N x^{\frac{2}{r+4}} < m \leqq N x^{\frac{2}{r+3}}}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right). \tag{132}$$

Auf die Summe (132) wende ich den mit der Weylschen Methode bewiesenen Hilfssatz 7 von [8] an, wonach für $r \geqq 1$ und $R = 2^{r-1}$

$$U_r = B x^{-\frac{1}{20Rr}} \log^3 x$$

ist. Für $r \leqq X$ ist hierin wegen (123)

$$x^{-\frac{1}{20Rr}} = \exp\left(-\frac{\log x}{20Rr}\right) \leqq \exp\left(-\frac{\log x}{20 \cdot 2^{X-1} X}\right)$$

$$\leqq \exp\left(-\frac{\log x}{10 \cdot 2^{\log\log x + 8} \cdot 2 \log\log x}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(\log x)^{1-\log 2}}{5120 \log\log x}\right)$$

$$= \frac{B}{\log^3 x \log\log x} = \frac{B}{X \log^3 x}.$$

Somit ist $U_r = B X^{-1}$,

$$S_4 = B. \tag{133}$$

Die Summe (127) ist ebenfalls in [8] abgeschätzt, und zwar ist nach dem dortigen Hilfssatz 4

$$S_5 = B. \tag{134}$$

Aus (124), (131), (133) und (134) ergibt sich die Behauptung (121) von Hilfssatz 5.

Beweis der Abschätzung (11). Man führe die Teilerfunktion

$$S(x; a, b, N) = \sum_{\substack{m\,n \leqq x \\ m \equiv a,\, n \equiv b \,(\mathrm{mod}\, N)}} n$$

ein; T bedeute die Summe (120). Nach den Formeln (9), (10), (14) und (33) von [8] ist dann, mit gewissen reellen Konstanten $f(a, b)$ und einem gewissen $N = N(Q)$,

$$A_Q(x) = \sum_{a,b=1}^{N} f(a, b)\, S(N x; a, b, N) + B x,$$

$$S(N x; a, b, N) = \tfrac{1}{2} N x^2 \sum_{m=1}^{\infty}{}' m^{-2} - N x T + B x,$$

also

$$\mathrm{P}_Q(x) = -N x \sum_{a,b=1}^{N} f(a, b)\, T + B x.$$

Wegen (121) folgt hieraus die zu beweisende Abschätzung (11).

Literatur

[1] Hua, L. K.: Additive Primzahlentheorie. [Russisch.] Akad. Nauk SSSR., Trudy mat. Inst. Steklov **22**, 1—179 (1947). — [2] Hua, L. K.: An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications. Quart. J. Math., Oxford series **20**, 48—61 (1949). — [3] Hua, L. K.: Additive Primzahltheorie (in chinesischer Sprache). Peking 1957. II. chinesische Auflage des Buches [1]. — [4] Hua, L. K., and Wu Fong: An improvement of Winogradoff's mean value theorem and some applications. Acta Mathematica Sinica **7**, 573—588 (1957). Chinesisch mit englischer Zusammenfassung. — [5] Koroboff, N. M.: Abschätzungen trigonometrischer Summen und ihre Anwendungen. [Russisch.] Uspechi mat. Nauk **13**, 185—192 (1958). — [6] Prachar, K.: Primzahlverteilung. Berlin 1957. — [7] Titchmarsh, E. C.: The theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford 1951. — [8] Walfisz, A.: Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Vierte Abhandlung. Math. Z. **35**, 212—229 (1932). — [9] Walfisz, A.: Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Achte Abhandlung. Trudy Tbilisskogo mat. Inst. **5**, 181—196 (1938). — [10] Walfisz, A.: Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln. Warszawa 1957. — [11] Walfisz, A.: Über die Wirksamkeit einiger Abschätzungen trigonometrischer Summen. Acta Arithmetica **4**, 108—180 (1958). — [12] Winogradoff, I. M.: Eine neue Abschätzung der Funktion $\zeta(1 + i t)$. [Russisch.] Izvestija Akad. Nauk SSSR., Ser. mat. **22**, 161—164 (1958). — [13] Winogradoff, I. M.: Über ein mehrfaches Integral. [Russisch.] Izvestija Akad. Nauk SSSR., Ser. mat. **22**, 577—584 (1958).

Tiflis (UdSSR), Mathematisches Institut

(Eingegangen am 20. Februar 1959)

Schmeidler, W.
Math. Zeitschr. 72, 279—293 (1960)

Die Navier-Stokesschen Gleichungen der Hydrodynamik als System quadratischer Integralgleichungen

Leon Lichtenstein zum Gedächtnis

Von
Werner Schmeidler

Einleitung

Es ist bisweilen von Nutzen, den erreichten Stand der Analysis an einem konkreten Problem zu prüfen. So soll im folgenden versucht werden, ein altbekanntes und bisher nur in Spezialfällen gelöstes Problem, nämlich die Berechnung von Geschwindigkeits- und Druckfeld in einer zähen Flüssigkeit im Außenraum eines bewegten Körpers, in einem allgemeineren Sinne als bisher der Lösung näherzubringen. Als Haupthilfsmittel wird dabei der Übergang vom Differentialgleichungs- zum Integralgleichungssystem verwendet, ein Verfahren, das im linearen Gebiete längst bekannt und vielseitig geübt, im nichtlineare Falle jedoch erst in den letzten Jahrzehnten in seiner Bedeutung erkannt wurde. Einer der verdientesten Forscher auf diesem Gebiete war Leon Lichtenstein, der gerade auch in dem hier zu betrachtenden Anwendungsgebiete mit dieser Methode die ersten Schritte getan hat, um zu Existenz- und Eindeutigkeitssätzen zu gelangen[1]). Er benutzte die klassische Theorie der Greenschen Funktionen für den Differentialoperator ΔU, um den Einfluß der Zähigkeit zu berücksichtigen. Aber hiermit erfaßt man noch nicht die zeitliche Veränderlichkeit der Strömung, die erst dann richtig zur Geltung kommt, wenn man an Stelle von ΔU den Differentialoperator $\left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) U$ und die auf ihn bezüglichen Greenschen Funktionen heranzieht. Dieser Weg wird im folgenden eingeschlagen.

In § 1 wird zunächst einiges über diese Greenschen Funktionen zusammengestellt, wobei die Analogie zur Potentialtheorie möglichst weit vorangetrieben wird. Es folgt eine gewisse Erweiterung dieses Begriffes, die dem hier im Vordergrunde stehenden Problem der geradlinigen Parallelbewegung eines Körpers in einer zähen Flüssigkeit mit beliebig vorgegebenem Geschwindigkeitsgesetz entspricht. Insbesondere handelt es sich um die geradlinige Parallelbewegung einer *Kugel*, für die, ohne auf naheliegende Verallgemeinerungen einzugehen, der Weg zur Berechnung der Greenschen Funktion angegeben wird und einige für das Folgende wichtige Eigenschaften dieser Funktion

[1]) Vgl. insbesondere sein Werk „Grundlagen der Hydromechanik" Berlin 1929 und die dort zitierte Literatur.

abgeleitet werden, die von so allgemeiner Natur sind, daß ihre Gültigkeit für eine ganze Klasse von Körpern angenommen werden darf. Mit diesen Hilfsmitteln wird dann in § 2 das Integralgleichungssystem aufgestellt sowie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nachgewiesen, wobei die Randwerte des Druckes noch vorgegeben werden können.

§ 1. Greensche Funktionen für den Differentialoperator $\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$

Wir fassen einen festen Raumbereich $\mathfrak{B}$ mit der Oberfläche Fl als Definitionsgebiet für die Greensche Funktion $\Gamma(P, Q, t-t')$ ins Auge. Diese soll außer für $P=Q$ in $\mathfrak{B}$ der Differentialgleichung $\left(\nu \Delta_Q - \frac{\partial}{\partial t}\right) \Gamma = 0 \quad (\nu > 0)$ genügen. In bezug auf ein im Raume festliegendes Koordinatensystem seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die den Punkten P und Q entsprechenden Vektoren, und es sei

$$\Gamma(P, Q, t-t') = \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}{4\nu(t-t')}}}{(4\pi\nu(t-t'))^{\frac{3}{2}}} + \gamma(P, Q, t-t') \tag{1}$$

$(0 \leqq t' < t,\ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(x, y, z),\ \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(\xi, \eta, \zeta),\ \gamma$ zweimal stetig differentiierbar in $\mathfrak{B})$. Da die Differentialgleichung auch für das Anfangsglied außer für $Q=P$ gilt, wie man sich leicht überzeugt, ist

$$\nu \Delta_Q \gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial \gamma}{\partial t'} \tag{2}$$

im *ganzen* Bereich $\mathfrak{B}$. Ferner gelte bei Annäherung von Q an den Rand Fl:

$$\Gamma(P, Q, t-t') \to 0 \qquad (P, t, t' < t \text{ beliebig})$$

$$\gamma(P, Q, t-t') \to -\frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{q}|^2}{4\nu(t-t')}}}{(4\pi\nu(t-t'))^{\frac{3}{2}}} \qquad (\mathfrak{y} \to \mathfrak{q} \text{ Randpunkt}),$$

und für $t \to t'$ gelte $\Gamma(P, Q, t-t') \to 0$ $(P, Q$ beliebig). Dann ergibt sich für eine beliebige zweimal stetig differentiierbare Funktion $U(P, t)$ die Darstellung[2])

$$\left\{\begin{aligned} U(P,t) = {} & \nu \int_0^t \iint_{(Fl)} U(Q,t') \frac{\partial \Gamma}{\partial n_Q}(P, Q, t-t')\, do_Q\, dt' \quad (n_Q \text{ innere Normale}) \\ & - \int_0^t \iiint_{(\mathfrak{B})} \Gamma(P, Q, t-t') \left(\nu \Delta_Q - \frac{\partial}{\partial t'}\right) U(Q,t')\, d\tau_Q\, dt' + \\ & + \iiint_{(\mathfrak{B})} \Gamma(P, Q, t)\, U(Q, o)\, d\tau_Q. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

[2]) Man vgl. etwa I. N. SNEDDON: Elements of partial differential equations. London 1957.

Hierin bedeuten im Oberflächenintegral $U(Q, t')$ die inneren Randwerte dieser Funktion. Durch diese sowie durch die Werte von $\left(\nu \Delta_Q - \frac{\partial}{\partial t'}\right) U(Q, t')$ und durch die Anfangswerte $U(Q, o)$ ist somit die Funktion $U(P, t)$ bestimmt, und zwar eindeutig, falls die Existenz und eindeutige Bestimmtheit der Greenschen Funktion Γ für den Bereich $\mathfrak{B}$ feststeht. Dem Zweck dieser Mitteilung entsprechend wollen wir uns im folgenden an ein konkretes Beispiel halten, nämlich an die *Kugel*, und zwar wollen wir den Außenraum der Kugel als Bereich ins Auge fassen. Dann ist natürlich zu verlangen, daß $\Gamma(P, Q, t-t')$ und ebenso $\gamma(P, Q, t-t')$ im Unendlichen stark genug verschwinden, und zur Anwendung der Formel (3) ist die Konvergenz der auftretenden Integrale Vorbedingung.

Um nun zu einer Bestimmung von Γ bzw. γ zu gelangen, beachten wir folgendes: Weil die Randwerte von γ bekannt sind, die Differentialgleichung (2) erfüllt sein soll und die Anfangswerte verschwinden, ergibt sich die Integralgleichung[3]):

$$(4)\quad \begin{cases} \gamma(R, P, t) = \gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) \\ \qquad = -\nu \int_0^t \iint_{(F t')} \frac{e^{-\frac{\mathfrak{r}-\mathfrak{q}'^2}{4\nu t'}}}{(4\pi\nu t')^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial q'} \left[\frac{e^{-\frac{|\mathfrak{f}-\mathfrak{q}'|^2}{4\nu(t-t')}}}{(4\pi\nu(t-t'))^{\frac{3}{2}}} + \gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t-t') \right] do'_Q dt' \end{cases}$$

$$(R|\mathfrak{r},\ P|\mathfrak{f},\ Q|\mathfrak{q}';\ q' = |\mathfrak{q}'|;\ \text{später}\ r = |\mathfrak{r}|,\ s = |\mathfrak{f}|),$$

die zur Berechnung der unbekannten Funktion $\gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t)$ herangezogen werden soll. Wir können sie in der Form schreiben:

$$(4)\qquad \gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) = f(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) - \nu \int_0^t \iint_{(F t')} K(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t') \frac{\partial \gamma}{\partial q'} (\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t-t')\, do'_Q dt',$$

wobei

$$(5)\qquad f(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) = -\nu \int_0^t \iint_{(F t')} K(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t') \frac{\partial K}{\partial q'} (\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t-t')\, do'\, dt'$$

und

$$K(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) = \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{r}-\mathfrak{f}|^2}{4\nu t}}}{(4\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}}$$

---

[3]) Wir denken uns die Kugel vorläufig festgehalten (Mittelpunkt Koordinatenanfangspunkt); erst später wird die Bewegung mitberücksichtigt. Die Greensche Funktion Γ bedeutet dann physikalisch die Temperatur im Punkte Q zur Zeit t, die in einem wärmeleitenden Körper hervorgerufen wird durch einen Wärmestoß der Stärke 1 im Punkte P zur Zeit $t' < t$, wenn für $t = t'$ im ganzen Bereich die Temperatur 0 herrscht und diese auch am Rande, d.h. an der Oberfläche der Kugel und im Unendlichen, dauernd aufrechterhalten wird. Versteht man unter Temperatur die absolute Temperatur, so ist $\Gamma \geqq 0$ physikalisch evident. — Auch für gewöhnliche Greensche Funktionen gibt es bekanntlich eine ähnliche Deutung durch einen *stationären* Wärmevorgang; hier handelt es sich aber gerade um die Zeitabhängigkeit.

bedeutet. Wenn wir noch in dem Zeitintegral $t-t'=\tau$ setzen, so entsteht

$$\gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)=f(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)-\nu\int_0^t\iint_{(F\mathfrak{r}')}K(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t-\tau)\,\frac{\partial\gamma}{\partial q'}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',\tau)\,do'\,d\tau \tag{6}$$

als Bestimmungsgleichung für γ. Differentiation nach r und s, die unter dem Integralzeichen zulässig ist, liefert alsdann

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)=\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s}(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)-\nu\int_0^t\iint_{(F\mathfrak{r}')}\frac{\partial K}{\partial r}(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt', \tag{7}$$

wobei die Bezeichnung so gemeint ist, daß links wie rechts nach den Beträgen der ersten beiden Variablen differentiiert und dann unter dem Integralzeichen bei $\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}$ für die erste Variable $\mathfrak{f}$, für die zweite $\mathfrak{q}'$ einzusetzen ist.

Wir haben in Formel (7) eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art vor uns, die einfach durch Iteration gelöst werden kann. Da die Kerne K und $\frac{\partial K}{\partial r}$ im Bereich $0\leqq t'\leqq t$, $r\geqq a+\delta$ stetig sind[4]), wird die entstehende Neumannsche Reihe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)=\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s}(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)&-\nu\int_0^t\iint_{(F\mathfrak{r}')}\frac{\partial K}{\partial r}(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt'+\\&+\nu^2\int_0^t\iint_{(F\mathfrak{r}')}\frac{\partial K}{\partial r}(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t-t')\int_0^{t'}\iint_{(F\mathfrak{r}'')}\frac{\partial K}{\partial r}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}'',t'-t'')\times\\&\times\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s}(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t'')\,do'\,do''\,dt'\,dt''-+\cdots\end{aligned}$$

in dem Bereich $0\leqq t\leqq T$ für jedes T und für $r,s\geqq a+\delta$ gleichmäßig konvergent und die Lösung $\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}=g(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)$ stetig. Differentiiert man (6) nach s, so entsteht

$$\frac{\partial\gamma}{\partial s}(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)=\frac{\partial f}{\partial s}(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)-\nu\int_0^t\iint_{(F\mathfrak{r}')}K(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt'.$$

Trägt man nun rechts die Lösung $g(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t')$ ein, so ist $\frac{\partial\gamma}{\partial s}(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)$ damit bestimmt. Einführung dieser Funktion auf der rechten Seite von (6) liefert dann die gesuchte Funktion $\gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)$ selbst. Die dabei erforderlichen Grenzübergänge sind ohne Schwierigkeiten durchführbar.

Wir haben uns nun davon zu überzeugen, daß die hiermit bestimmte Funktion den Bedingungen für die Greensche Funktion des Außenraumes der Kugel entspricht, vor allem also der Differentialgleichung $\nu\Delta_Q\gamma=\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ genügt, wobei die Differentiation Δ bezüglich der Variablen $\mathfrak{r}$ zu verstehen ist, also

[4]) Funktionswert für $t'=t$ gleich Null gesetzt für $\mathfrak{r}-\mathfrak{f}\neq 0$.

mit $\Delta_{\mathfrak{f}}$ bezeichnet werden soll. Zunächst gilt wegen (5):

$$\left(\nu \Delta_{\mathfrak{f}} - \frac{\partial}{\partial t}\right) f(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) = -\nu \int_0^t \iint_{(F\mathfrak{l}')} K(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t') \frac{\partial}{\partial q'} \left[\left(\nu \Delta_{\mathfrak{f}} - \frac{\partial}{\partial t}\right) K(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t - t')\right] do' \, dt'$$

und hierin ist die eckige Klammer Null für *alle* Vektoren $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{f}$, also

$$\left(\nu \Delta_{\mathfrak{f}} - \frac{\partial}{\partial t}\right) f(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) = 0.$$

Setzt man nun

$$\left(\nu \Delta_{\mathfrak{f}} - \frac{\partial}{\partial t}\right) \gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) = F(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t),$$

so wird nach (4) bzw. (6)

$$F(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) = -\nu \int_0^t \iint_{(F\mathfrak{l}')} K(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t - \tau) \frac{\partial F}{\partial q'} (\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', \tau) \, do' \, d\tau.$$

Aus dieser Integralgleichung folgt dann auf demselben Wege wie oben erst $\frac{\partial^2 F}{\partial r \, \partial s} = 0$, darauf $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$ und schließlich $F(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) = 0$ womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Zur Bestimmung der Randwerte unserer der Integralgleichung (6) genügenden Funktion $\gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t)$ können wir aussagen, daß analog zu unserer Ausgangsgleichung (4) mit Hilfe der Randwerte $\gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t')$ auch die Darstellung gilt:

$$\gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) = \nu \int_0^t \iint_{(F\mathfrak{l}')} \gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t') \frac{\partial}{\partial q'} \left[\gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t - t') + K(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t - t')\right] do' \, dt',$$

und daraus folgt

$$0 = \int_0^t \iint_{(F\mathfrak{l}')} \left[\gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t') + K(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t')\right] \frac{\partial}{\partial q'} \left[\gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t - t') + K(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t - t')\right] do' \, dt'.$$

Setzen wir nun

$$\gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) + K(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) = \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t),$$

so besagt dies

$$\int_0^t \iint_{(F\mathfrak{l}')} \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t') \frac{\partial \Gamma}{\partial q'} (\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t - t') \, do' \, dt' = 0.$$

Unser Ziel ist, hieraus die Folgerung $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t) = 0$ ($\mathfrak{q}$ auf Fl) zu ziehen. Wir wenden zu diesem Zwecke den Gaußschen Satz

$$\iint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} do = -\iiint (\varphi \Delta \psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi) \, d\tau$$

auf den Außenraum $\mathfrak{A}_\delta$ je einer kleinen Kugel vom Radius δ um $\mathfrak{r}$ und um $\mathfrak{f}$ sowie unserer gegebenen Kugel an und erhalten, da die Oberflächenintegrale über die kleinen Kugeln mit $\delta \to 0$ gegen Null gehen:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^t \iiint_{\mathfrak{A}_\delta} \left[\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t') \Delta_{q'} \Gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t - t') + \operatorname{grad}_{q'} \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}', t') \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{grad}_{q'} \Gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t - t')\right] d\tau_{q'} \, dt' = 0.$$

Da in $\mathfrak{A}_\delta$ für Γ, wie wir bewiesen haben, die Differentialgleichung erfüllt ist, entsteht:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^t\iiint_{(\mathfrak{A}_\delta)}\Big[\Gamma(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\,\frac{\partial\Gamma}{\partial t'}\,(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')-\operatorname{grad}_{\mathfrak{q}'}\Gamma(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\times$$
$$\times\operatorname{grad}_{\mathfrak{q}'}\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\Big]\,d\tau_{\mathfrak{q}'}\,dt'=0,$$

und hierin ergibt die Ersetzung von $t-t'$ durch t' und die Vertauschung von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{f}$:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^t\iiint_{(\mathfrak{A}_\delta)}\Big[\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial\Gamma}{\partial t'}\,(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')+\operatorname{grad}_{\mathfrak{q}'}\Gamma(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\times$$
$$\times\operatorname{grad}_{\mathfrak{q}'}\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\Big]\,d\tau_{\mathfrak{q}'}\,dt=0.$$

Addition beider Gleichungen liefert:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^t\iiint_{(\mathfrak{A}_\delta)}\frac{\partial}{\partial t'}\,[\Gamma(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\,\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')]\,d\tau_{\mathfrak{q}'}\,dt'$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\iiint_{\mathfrak{A}_\delta}[\Gamma(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\,\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')_{t'\to t}-\Gamma(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\,\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')_{t'\to 0}]\,d\tau_{\mathfrak{q}'}$$
$$=\Gamma(\mathfrak{x},\mathfrak{f},t)-\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{x},t)=0,$$

also die *Symmetrie unserer Funktion* $\Gamma(\mathfrak{x},\mathfrak{f},t)$. Andererseits untersuchen wir den Ausdruck

$$\gamma(\mathfrak{x},\mathfrak{f},t)=-\nu\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\Big[K(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\,\frac{\partial\Gamma}{\partial q'}\,(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')-\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial K}{\partial q'}\,(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\Big]\,do'\,dt'-$$
$$-\nu\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial K}{\partial q'}\,(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt'$$

und formen die erste Zeile auf dieselbe Weise um, wodurch wir erhalten:

$$\gamma(\mathfrak{x},\mathfrak{f},r)=\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{x},t)-K(\mathfrak{x},\mathfrak{f},t)-\nu\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial K}{\partial q'}\,(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt'.$$

Hierdurch folgt mit Hilfe der Symmetrie

$$\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial K}{\partial q'}\,(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt'=0.$$

Wegen

$$\frac{\partial K}{\partial q'}\,(\mathfrak{x},\mathfrak{q}',t')=\frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{q}'|^2}{4\nu t'}}}{\pi^{\frac{3}{2}}(4\nu t')^{\frac{5}{2}}}\,2\,(r\cos(\mathfrak{x}\,\mathfrak{q}')-a)\qquad(r>a)$$

erkennt man das Folgende: Es sei $\Gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}_0', t-t') \neq 0$ für ein bestimmtes $t'<t$, ein $\mathfrak{q}_0'$ auf der Fläche und eine kleine Umgebung davon. Wir können dann die radiale Annäherung von $\mathfrak{r}$ an $\mathfrak{q}_0'$ so weit treiben, daß in dieser Umgebung von $\mathfrak{q}_0'$, t' ein so starker Wert der Kernfunktion bei gleichzeitiger Herabdrückung aller weiter entfernten Funktionswerte des Integranden entsteht, daß der Wert des Integrals unmöglich Null sein kann. Unsere Annahme $\Gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}_0', t-t') \neq 0$ führt daher zu einem Widerspruch und es folgt notwendig

$$\Gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}, t) = 0 \qquad \text{für } \mathfrak{q} \text{ auf } Fl.$$

Darüber hinaus haben wir zu zeigen, daß für $s>a$ stets $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) \geqq 0$ sein soll. Wegen des Verschwindens auf der Oberfläche und wegen $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, t) > 0$ für genügend kleines t muß, falls für $0<s\leqq r$ einmal $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t)$ negativ ist, ein kleinstes Minimum $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) < 0$ existieren. Für eine kleine Kugel um diesen Punkt gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &> \nu \iint \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t) \frac{\partial \Gamma}{\partial n_Q}(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, do \\ &= \nu \iiint\limits_{(K)} [\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, \Delta_{\mathfrak{q}} \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t) + \operatorname{grad}_{\mathfrak{q}}^2 \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)]\, d\tau \\ &\geqq \nu \iiint\limits_{(K)} \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, \Delta_{\mathfrak{q}} \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, d\tau = \iiint\limits_{K} \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, d\tau \end{aligned}$$

und dies liefert durch Integration über t von $t_0<t$ bis t:

$$0 > \iiint\limits_{(K)} (\Gamma^2(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t) - \Gamma^2(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t_0))\, d\tau, \qquad \Gamma^2(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t_0) > \Gamma^2(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t),$$

das ist aber ein Widerspruch, wenn $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t)$ das kleinste negative Minimum für alle t zwischen o und t ist. Also ist in dem genannten Zeitbereich stets $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) \geqq 0$ und zwar im ganzen Raum. Dieselbe Schlußweise läßt sich schrittweise für größeres t fortsetzen und gilt somit allgemein.

Indem wir uns den Nachweis des genügend starken Verschwindens von Γ im Unendlichen für später vorbehalten, können wir aussagen, daß abgesehen davon unsere gefundene Funktion tatsächlich sämtlichen geforderten Bedingungen entspricht. Übrigens ist sie eindeutig bestimmt, denn gäbe es noch eine zweite, so müßte die Differenz beider im ganzen Außenraum der Differentialgleichung genügen und außerdem am Rande verschwinden; daraus würde aber folgen, daß sie im ganzen Außenraum Null ist.

Unsere nächste Aufgabe ist nun die *Erweiterung des Begriffes der Greenschen Funktion* auf den Fall, daß der bisher als fest angesehene Grundbereich zeitlich variabel wird. Wir beziehen uns dabei wieder auf den Außenraum einer Kugel, die jetzt mit einer zeitlich veränderlichen Geschwindigkeit $v(t)$ in der x-Richtung ohne Drehung fortbewegt werden soll ($x = x(t)$ Bewegungsgesetz). Wiederum lassen wir die an sich leicht möglichen Verallgemeinerungen hier der Einfachheit wegen beiseite. Es handelt sich jetzt um die Bestimmung

einer Funktion $\Gamma(P, Q, t, t_0)$, die durch folgende Bedingungen festgelegt wird:

$$\text{(1a)} \qquad \begin{cases} \Gamma(P, Q, t, t_0) = K(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t - t_0) + \gamma(P, Q, t, t_0); \ \Gamma \to 0 \quad \text{für} \quad t \to t_0. \\ 0 \leqq t_0 \leqq t \qquad \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \Big| \begin{matrix} \mathfrak{x} \\ \mathfrak{y} \end{matrix}. \end{cases}$$

(2a) Es gilt für $\Gamma(P, Q, t, t')$:

$$\nu \Delta_Q \Gamma = -\frac{\partial \Gamma}{\partial t'} \quad \text{im Außenraum } \mathfrak{A}_{t'} \text{ von } K_{t'}, \text{ außer für } Q = P,$$

$$\nu \Delta_Q \gamma = -\frac{\partial \gamma}{\partial t'} \quad \text{im ganzen Bereich } \mathfrak{A}_{t'}.$$

Falls Q sich der Oberfläche von $K_{t'}$ (das ist die Kugel in ihrer Lage zur Zeit t', $t_0 \leqq t' \leqq t$) nähert, soll $\Gamma(P, Q, t, t') = 0$ werden.

Physikalisch bedeutet $\Gamma(P, Q, t, t_0)$ die Temperatur in einem Punkte Q des wärmeleitenden Außenbereiches $\mathfrak{A}_t$ zur Zeit t, die durch einen Wärmestoß der Stärke 1 in P zur Zeit t_0 hervorgerufen wird, wenn die Temperatur an der Oberfläche von $K_{t'}$ während der ganzen Zeit $t_0 \leqq t' \leqq t$ auf Null gehalten wird und gleichzeitig auch im Unendlichen die Temperatur Null herrscht, und wenn ferner zu Anfang im ganzen Körper die Temperatur gleich Null ist. Natürlich wird bei dieser „physikalischen" Deutung von Bewegungsvorgängen innerhalb des wärmeleitenden Körpers abgesehen, also kein konvektiver Wärmetransport untersucht.

Wir müssen jetzt den Gedankengang, der unter der Annahme der Existenz der Greenschen Funktion zu der Formel (3) führt, nochmals durchgehen. In der Formel (untere Grenze t_0 statt o):

$$\int_{t_0}^{t-\varepsilon} \iiint_{(\mathfrak{A}_{t'})} \frac{\partial}{\partial t'} [U(Q, t') \Gamma(P, Q, t, t')] \, d\tau_Q \, dt'$$

$$= \int_{t_0}^{t-\varepsilon} \iiint_{(\mathfrak{A}_{t'})} \left[\nu (\Gamma \Delta_Q U - U \Delta_Q \Gamma) - \Gamma(P, Q, t, t') \left(\nu \Delta_Q - \frac{\partial}{\partial t'} \right) U \right] d\tau_Q \, dt'$$

kann jetzt nicht ohne weiteres auf der linken Seite die Integration über t' mit der räumlichen Integration vertauscht werden. Indessen zeigt eine Hilfsbetrachtung, die wir hier übergehen, die Gültigkeit nachfolgender Hilfsformel: ($H(Q, t')$ beliebig)

$$\iiint_{\mathfrak{A}_{t'}} \frac{\partial H}{\partial t'} (Q, t') \, d\tau_Q = \frac{\partial}{\partial t'} \iiint_{(\mathfrak{A}_{t'})} H(Q, t') \, d\tau_Q - \iint_{(Fl')} H(Q, t') \cos(n_Q, \xi) \, do_Q \cdot v(t').$$

Setzen wir nun für $H(Q, t')$ wie oben $U(Q, t') \Gamma(P, Q, t, t')$ ein, so ist an der Oberfläche Fl' jetzt $\Gamma(P, Q, t, t') = 0$, und das letzte Glied ist Null. Daher bleibt in dem für uns maßgebenden Falle die Vertauschbarkeit der zeitlichen Ableitung mit dem räumlichen Integralzeichen wieder erhalten und die Formel

(3) gilt in der Form

$$(3\,a)\quad \left\{\begin{aligned} U(P,t) = \nu \int_{t_0}^{t}\iint_{(F l')} U(Q,t')\,\frac{\partial \Gamma}{\partial n_Q}\,(P,Q,t,t')\,do_Q\,dt' \;-\int_{t_0}^{t}\iiint_{(\mathfrak{R}_{t'})} \Gamma(P,Q,t,t')\times \\ \times\left(\nu\,\Delta_Q - \frac{\partial}{\partial t'}\right) U(Q,t')\,d\tau_Q\,dt' + \iiint_{(\mathfrak{R}_{t_0})} \Gamma(P,Q,t,t_0)\,U(Q,t_0)\,d\tau_Q, \end{aligned}\right.$$

worin das letzte Glied noch wegfällt, wenn $U(Q,t_0)$ verschwindet. Am Beispiel der Kugel können wir dies erläutern. Nach (3a) gilt, angewandt auf das Zeitintervall von t_0 bis t und auf die Funktion $\gamma(R,P,t,t_0)$, welche für $t=t_0$ verschwindet, analog zu (4) jetzt die Darstellung:

$$\begin{aligned}\gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t,t_0) &= \nu\int_{t_0}^{t}\iint_{(Fl')}\gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t',t_0)\,\frac{\partial \Gamma}{\partial n_{Q'}}\,(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t,t')\,do'\,dt' \qquad (t_0\leqq t'\leqq t)\\ &= -\nu\int_{t_0}^{t}\iint_{(Fl')} K(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t'-t_0)\,\frac{\partial}{\partial q'}\,[K(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t') + \gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t,t')]\,do'\,dt'\end{aligned}$$

als Bestimmungsgleichung für γ. Dabei bedeutet q' die Entfernung des Randpunktes Q' vom Mittelpunkte der Kugel $K_{t'}$, in dieser Richtung muß unter dem Integralzeichen differentiiert werden.

Die rechts auftretende Funktion γ können wir nun ebenfalls in der Form schreiben:

$$\begin{aligned}\gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t,t') &= -\nu\int_{t'}^{t}\iint_{Fl''} K(\mathfrak{f},\mathfrak{q}'',t''-t')\times\\ &\quad\times\frac{\partial}{\partial q''}\,[-K(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t-t'') + \gamma(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t,t'')]\,do''dt'',\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Randpunkte durch die Vektorbezeichnung $\mathfrak{q}$ mit dem der entsprechenden Zeitvariablen zugehörigen Index versehen. Wir finden weiterhin

$$\begin{aligned}\gamma(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t,t'') &= -\nu\int_{t'}^{t}\iint_{Fl''} K(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}''',t'''-t'')\times\\ &\times\frac{\partial}{\partial q'''}\,[K(\mathfrak{q}'',\mathfrak{q}''',t-t''') + \gamma(\mathfrak{q}'',\mathfrak{q}''',t,t''')]\,do'''\,dt''' \quad (t_0\leqq t'\leqq t''\leqq t'''\leqq\cdots\leqq t)\end{aligned}$$

und so fort. Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial q'}\,(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t,t') &= -\nu\int_{t'}^{t}\iint_{Fl''} K(\mathfrak{f},\mathfrak{q}'',t''-t')\times\\ &\quad\times\frac{\partial^2}{\partial q''\,\partial q'}\,[K(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t-t'') + \gamma(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t,t'')]\,do''\,dt''\end{aligned}$$

und wiederum

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\gamma}{\partial q'\,\partial q''}\,(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t,t'') &= -\nu\int_{t'}^{t}\iint_{Fl'''}\frac{\partial K}{\partial q'}\,(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}''',t'''-t')\times\\ &\quad\times\frac{\partial^2}{\partial q''\,\partial q'''}\,[K(\mathfrak{q}'',\mathfrak{q}''',t-t''') + \gamma(\mathfrak{q}'',\mathfrak{q}''',t,t''')]\,do'''\,dt''',\end{aligned}$$

wobei jedesmal die Differentiationen in den gekennzeichneten Richtungen zu verstehen sind.

Die zuletzt hingeschriebene Gleichung ist eine lineare Integralgleichung für die Funktion

$$\gamma(t', t, t'') = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial q' \partial q''}(\mathfrak{q}', \mathfrak{q}'', t, t'')$$

und hat Volterraschen Typus. Wir können die Gleichung in der Form schreiben:

$$\gamma(t', t, t'') = f(t', t, t'') + \int_{t'}^{t} H(t', t''', t'')\, \gamma(t''', t, t''')\, dt'''.$$

Hierbei bedeutet

$$H(t', t''', t'') = -\nu \iint_{Fl'''} \frac{\partial K}{\partial q'}(\mathfrak{q}', \mathfrak{q}''', t''' - t'')\, do'''$$

und

$$f(t', t, t'') = -\nu \int_{t''}^{t} \iint_{Fl'''} \frac{\partial K}{\partial q'}(\mathfrak{q}', \mathfrak{q}''', t''' - t'') \frac{\partial^2 K}{\partial q'' \partial q'''}(\mathfrak{q}'', \mathfrak{q}''', t - t''')\, do'''\, dt'''.$$

Beide Funktionen, erstere mit $\sqrt{t''' - t''}$ multipliziert, sind stetig im Intervall und daher beschränkt.

Die zugehörige Neumannsche Reihe liefert

$$\gamma(t', t, t''') = f(t', t, t''') + \int_{t''}^{t} H(t', t''', t'')\, f(t'', t, t''')\, dt''' + \\ + \int_{t''}^{t} H(t', t''', t'') \int_{t'''}^{t} H(t'', t^{(4)}, t''')\, f(t''', t, t^{(4)})\, dt^{(4)}\, dt''' + \cdots$$

und besitzt eine Majorante der Form

$$F + M F \sqrt{t - t_0} + M^2 F \frac{(\sqrt{t - t_0})^2}{2!} + \cdots,$$

welche im Intervall $t_0 \leqq t \leqq T$ gleichmäßig konvergiert. Einsetzung der entsprechenden Lösung $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial q' \partial q''}(\mathfrak{q}', \mathfrak{q}'', t, t'')$ in die vorangehenden Gleichungen ergibt schließlich die gesuchte Funktion $\gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0)$, von der wir wie oben zeigen, daß sie der Differentialgleichung im ganzen Außenraum $\mathfrak{A}_{t_0}$ genügt. Auch die übrigen Schlüsse lassen sich entsprechend wiederholen, so daß wir sowohl die Symmetrie

$$\gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0) = \gamma(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}, t, t_0)$$

als auch das Verschwinden am Rande

$$\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{q}, t, t_0) = -K(\mathfrak{x}, \mathfrak{q}, t, t_0) + \gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{q}, t, t_0) = 0 \qquad (\mathfrak{q} \text{ auf } Fl_{t_0})$$

behaupten können, ebenso die Eindeutigkeit.

Damit ist die Existenz und eindeutige Bestimmtheit der Greenschen Funktion für das genannte verallgemeinerte Problem bewiesen.

Es fehlt uns nun noch eine *Abschätzung von* $\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}, t, t_0)$ *in Abhängigkeit von* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{f}$, damit wir sicher sind, daß die Gl. (3a), welche die Grundlage der ganzen Überlegung liefert, auf den vorliegenden Fall anwendbar ist.

Hierzu behaupten wir die Existenz einer Konstanten C, so daß

$$\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}, t, t_0) \leqq \frac{C}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{f}|^3}$$

gilt.

Zum Beweise stellen wir zunächst fest, daß wegen $\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}, t, t_0) \geqq 0$ und $\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{q}, t, t_0) = 0$ ($\mathfrak{q}$ auf Fl_{t_0}) notwendig $\frac{\partial \Gamma}{\partial q}(\mathfrak{x}, \mathfrak{q}, t, t_0) \geqq 0$ ist, wonach wegen der Integralgleichung für $\gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}, t, t_0)$ folgt $\gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}, t, t_0) \leqq 0$,

$$\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}, t, t_0) \leqq \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{f}|^2}{4\nu(t-t_0)}}}{(4\pi\nu(t-t_0))^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Maximum dieser Funktion wird erreicht, wenn bei festem $|\mathfrak{x} - \mathfrak{f}| \neq 0$ die Bedingung

$$\frac{|\mathfrak{x} - \mathfrak{f}|^2}{4\nu(t - t_0)^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{t - t_0} = 0$$

erfüllt ist, was $\frac{|\mathfrak{x} - \mathfrak{f}|^2}{4\nu(t - t_0)} = \frac{3}{2}$ und damit als Maximalwert für alle $t > t_0$:

$$\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}, t, t_0) \leqq \operatorname{Max} \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{f}|^2}{4\nu(t-t_0)}}}{(4\pi\nu(t-t_0))^{\frac{3}{2}}} \leqq \left(\frac{3}{2\pi e}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{f}|^3} \tag{8}$$

liefert. Hierdurch ist die Behauptung bewiesen.

Entsprechend findet man als Schranke für die Ableitung für alle $t > t_0$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{f}|^2}{4\nu(t-t_0)}}}{(4\pi\nu(t-t_0))^{\frac{3}{2}}}\right)\right| \leqq \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{5}{2e}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{r+s}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{f}|^5} \qquad (r = |\mathfrak{x}|,\ s = |\mathfrak{f}|).$$

Wir haben weiterhin nach der Definition von

$$\gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}, t, t_0) = -\nu \int_{t_0}^{t} \iint_{Fl'} \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{q}'|^2}{4\nu(t-t')}}}{(4\pi\nu(t-t'))^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial \Gamma}{\partial q'}(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t, t')\, do'\, dt'$$

die Ableitung

$$\left|\frac{\partial \gamma}{\partial r}(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}, t, t_0)\right| \leqq \frac{\nu}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{t_0}^{t} \iint_{Fl'} \left|\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{q}'|^2}{4\nu(t-t')}}}{(4\nu(t-t'))^{\frac{3}{2}}}\right| \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial q'}(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t, t')\right| do'\, dt';$$

dies ist wegen des positiven Integranden:

$$\leqq \frac{\nu}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{5}{2e}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{r+a}{(r-a)^5} \cdot \int_{t_0}^{t} \iint_{Fl'} \frac{\partial \Gamma}{\partial q'}(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t, t')\, do'\, dt'.$$

Aber wegen (3a) mit $U = 1$ gilt

$$1 = \nu \int_{t_0}^{t} \iint_{(Fl')} \frac{\partial \Gamma}{\partial q'}(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t, t')\, do'\, dt' + \iiint_{\mathfrak{A}_{t_0}} \Gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}, t, t_0)\, d\tau_{\mathfrak{q}},$$

und das letzte Raumintegral konvergiert; die Abschätzung von Γ durch K zeigt, daß sein Wert $\leqq 1$ ist, andererseits ist er positiv. Daher wird

$$\nu \int_{t_0}^{t} \iiint_{(F(t'))} \frac{\partial \Gamma}{\partial q'}(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t, t')\, do'\, dt' \leqq 1,$$

und wir erhalten für $r > s > a$, alle t und t_0 sowie $r \to \infty$:

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial r}(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t, t_0) \right| \leqq \frac{C}{r^4}.$$

Ebenso gilt wegen der Symmetrie

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t, t_0) \right| \leqq \frac{C}{s^4}$$

für $s > r > a$, alle t und t_0 sowie $s \to \infty$.

§ 2. Das Integralgleichungssystem der Navier-Stokesschen Gleichungen und seine Lösung

Wir schreiben jetzt die Navier-Stokesschen Gleichungen in der Form

$$(9) \qquad \begin{cases} \nu \Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial p}{\partial x} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} + w \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \nu \Delta v - \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial p}{\partial y} + u \dfrac{\partial v}{\partial x} + v \dfrac{\partial v}{\partial y} + w \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \nu \Delta w - \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial p}{\partial z} + u \dfrac{\partial w}{\partial x} + v \dfrac{\partial w}{\partial y} + w \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

$$(10) \qquad Z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung ergibt sich vermöge (9):

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho} \Delta p = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} + w \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \qquad\quad - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(u \dfrac{\partial v}{\partial x} + v \dfrac{\partial v}{\partial y} + w \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \qquad\quad - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(u \dfrac{\partial w}{\partial x} + v \dfrac{\partial w}{\partial y} + w \dfrac{\partial w}{\partial z}\right). \end{cases}$$

u, v, w bedeuten hierbei die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes $P(x, y, z)$ zur Zeit t. Das benutzte Koordinatensystem liege im Raume fest. Zur Zeit $t = 0$ sei der Geschwindigkeitsvektor in der zähen Flüssigkeit überall gleich Null, ebenso in jedem endlichen Punkte für $t \to \infty$. $p = p(x, y, z, t)$ bedeutet den Druck, ϱ die konstante Dichte der Flüssigkeit, ν den Zähigkeitskoeffizienten. In der Flüssigkeit befinde sich eine Kugel vom Radius a, deren Mittelpunkt zur Zeit t die Entfernung $x(t)$ vom Koordinatenanfangspunkte habe und sich in der positiven x-Richtung parallel mit sich mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = U(t)$ vorwärtsbewege. Wegen der Haftreibung ist für jeden Punkt der Kugeloberfläche der dort vorgeschriebene Randwert des Geschwindigkeitsvektors $\big(U(t), 0, 0\big)$. Der in Betracht kommende Flüssigkeitsbereich

zur Zeit t ist das gesamte Äußere der Kugel in ihrer Lage zur Zeit t, den wir $\mathfrak{A}_t$ nennen. Es sei $x(0)=0$.

Da für den Druck die Δ-Ableitung, für die Geschwindigkeitskomponenten der Differentialausdruck $\nu\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ durch die unbekannten Funktionen und ihre räumlichen Ableitungen vorgeschrieben ist, verwenden wir zum Übergang in ein Integralgleichungssystem für u, v, w die im vorangehenden Paragraphen beschriebene Greensche Funktion $\Gamma(P, Q, t, t')$, für p die gewöhnliche Greensche Funktion, aber natürlich bezogen auf die jeweils veränderliche Lage der Kugel zur Zeit t. Man erhält letztere Funktion $G(P, Q, t)$ aus $G(P, Q, 0)$ vermöge der Beziehung

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta, t) = G(x - x(t), y, z; \xi - x(t), \eta, \zeta, 0).$$

Schreiben wir noch im Unendlichen dauernd den konstanten Druck 0 vor, auf der Kugeloberfläche den Druck $\bar{p}(Q, t)$ mit $\bar{p}(Q, 0)=0$, so erhalten wir jetzt auf Grund der Ergebnisse des vorigen Paragraphen das folgende Integralgleichungssystem:

$$(12)\quad \begin{cases} u(P,t) = \nu \int\limits_0^t \iint\limits_{Ft'} U(t') \frac{\partial \Gamma}{\partial n_Q}(P, Q, t, t')\, do_Q\, dt' - \\ \qquad - \int\limits_0^t \iiint\limits_{(\mathfrak{A}_{t'})} \Gamma(P, Q, t, t') \left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \xi} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right] d\tau_Q\, dt', \\ v(P,t) = - \int\limits_0^t \iiint\limits_{(\mathfrak{A}_{t'})} \Gamma(P, Q, t, t') \left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \eta} + u\frac{\partial v}{\partial \xi} + v\frac{\partial v}{\partial \eta} + w\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right] d\tau_Q\, dt', \\ w(P,t) = - \int\limits_0^t \iiint\limits_{(\mathfrak{A}_{t'})} \Gamma(P, Q, t, t') \left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \zeta} + u\frac{\partial w}{\partial \xi} + v\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right] d\tau_Q\, dt', \\ p(P,t) = \iint\limits_{(F_t)} \bar{p}(Q,t) \frac{\partial G}{\partial n_Q}(P, Q, t)\, do_Q + \\ \qquad + \varrho \iiint\limits_{(\mathfrak{A}_t)} G(P, Q, t) \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + \right. \\ \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial v}{\partial \xi} + v\frac{\partial v}{\partial \eta} + w\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(u\frac{\partial w}{\partial \xi} + v\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\right] d\tau_Q. \end{cases}$$

Jedes Lösungssystem von (12) genügt den Gln. (9) und (11) und daher auch, wie man unmittelbar sieht, der Gleichung

$$\left(\nu\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

im ganzen Außenraum $\mathfrak{A}_t$. Für $t=0$ ist $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ überall, also auch an der Oberfläche der Kugel. Ob aber daraus auch das Verschwinden an der Oberfläche von K_t für alle t und damit die unbeschränkte Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung folgt, muß einstweilen noch offen bleiben.

Zur Gewinnung eines Lösungssystems können wir das Verfahren der Iteration anwenden.

Wir beginnen mit den Anfangswerten

$$u_0(P,t) = \nu \int_0^t \iint_{(F\,t')} U(t') \frac{\partial \Gamma}{\partial n_Q}(P,Q,t,t')\, do_Q\, dt', \qquad v_0(P,t) = 0,$$

$$w_0(P,t) = 0, \qquad p_0(P,t) = \iint_{(F\,t_1)} \overline{p}(Q,t) \frac{\partial G}{\partial n_Q}(P,Q,t)\, do_Q, \; Z_0 = 0$$

und setzen dann allgemein

$$\begin{aligned} u_{n+1}(P,t) &= u_0 + \mathfrak{U}(u_n, v_n, w_n, p_n), \\ v_{n+1}(P,t) &= \mathfrak{V}(u_n, v_n, w_n, p_n), \\ w_{n+1}(P,t) &= \mathfrak{W}(u_n, v_n, w_n, p_n), \\ p_{n+1}(P,t) &= p_0 + \mathfrak{P}(u_n, v_n, w_n), \end{aligned}$$

worin $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{P}$ je die räumlichen Integraloperatoren rechter Hand in (12) darstellen.

Setzen wir voraus, daß u_n, v_n, w_n und ihre räumlichen partiellen Ableitungen von der Ordnung $1/r^2$ mit $r \to \infty$ verschwinden, während p_n mit $1/r$, die Ableitungen von p_n mit $1/r^2$ gegen Null gehen, so ist zunächst die Konvergenz der räumlichen Integrale gesichert, so daß u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}, p_{n+1} eindeutig bestimmt sind.

Um die Größenordnung von u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} abzuschätzen, grenzen wir um den Punkt $\mathfrak{r}$ eine Kugel vom Radius δ ab und berechnen für eine stetige Funktion $F(\mathfrak{q}, t')$ das Integral

$$\int_0^t \iiint_{(\delta)} F(\mathfrak{q}, t')\, K(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t - t')\, d\tau_{\mathfrak{q}}\, dt'.$$

Dies wird, wie eine entsprechende Abschätzung zeigt, bei beliebigem δ für $t \to 0$ beliebig klein. Schlägt man nun um den Punkt $\mathfrak{r}$ eine Kugel vom Radius $r/2$, so kann bei der Berechnung von u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} jeweils der Anteil des räumlichen Integrals innerhalb der Kugel für genügend kleines t kleiner als Ct/r^2 gemacht werden, während der Anteil außerhalb der Kugel von derselben Größenordnung ist. Hiermit ist für u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} dieselbe Größenordnung des Verschwindens bewiesen, wenn sie für u_n, v_n, w_n, p_n gilt. Entsprechend verläuft der Beweis für die partiellen Ableitungen. Für $n = 0$ aber sind die Voraussetzungen erfüllt, also gelten sie allgemein, sobald wir die entsprechenden Aussagen für p_n gezeigt haben.

Zu diesem Zwecke formen wir den Ausdruck für $\mathfrak{P}(u_n, v_n, w_n)$ in (12) vermöge der Kontinuitätsgleichung[5]) um und erhalten ein Raumintegral über $F(u,v,w) = u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 + 2v_z w_y + 2w_x u_z + 2u_y v_x$. In dieser Schreibweise kann das Raumintegral $\mathfrak{P}(u_n, v_n, w_n)$ durch Einteilung des Raumes in zwei Halbräume vermöge der Grenzebene $r_{PQ} = s$ abgeschätzt werden. Man findet

$$|\mathfrak{P}(u_n, v_n, w_n)| \leqq \frac{C}{r^2}.$$

[5]) Aus $Z_0 = 0$ folgt durch eine leichte Rechnung $Z_1 = 0$, allgemein $Z_n = 0$.

Da das Oberflächenintegral in dem Ausdruck für p_0 von der Ordnung $1/r$ wird, ist hiermit die Behauptung bezüglich p_{n+1} bewiesen. Entsprechend verfährt man bezüglich der Ableitungen von p_{n+1}, deren Größenordnung im Unendlichen mindestens von der Ordnung $1/r^2$ wird.

Nachdem wir die unbeschränkte Fortsetzbarkeit des Iterationsprozesses gezeigt haben, kommt es nun darauf an, die Konvergenz des Verfahrens nachzuweisen. Hierzu führen wir die Differenzen ein:

$$u_n - u_{n-1} = \Delta u_n$$
$$v_n - v_{n-1} = \Delta v_n$$
$$w_n - w_{n-1} = \Delta w_n$$
$$p_n - p_{n-1} = \Delta p_n$$

und bezeichne die Summe der Maxima der Beträge

$$|\Delta u_n| + |\Delta v_n| + |\Delta w_n| + \left|\Delta \frac{\partial u_n}{\partial x}\right| + \cdots + \left|\Delta \frac{\partial w_n}{\partial z}\right|$$

mit M_n. Die Bauart der Gleichungen läßt erkennen, daß eine Konstante A existiert, so daß

$$M_{n+1} < A\sqrt{t}\, M_n$$

gilt, falls t klein genug gewählt wird. Da man den Faktor $A\sqrt{t} = q < 1$ machen kann, steht hiernach die gleichmäßige Konvergenz im ganzen Außenraum für $0 \leqq t \leqq t_1$, fest und führt zu dem gesuchten Lösungssystem u, v, w. Aus der letzten Gleichung ergibt sich dann die Existenz von $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, und damit Erfüllung der Gln. (9) und (10).

Schreibt man nun das Gleichungssystem (12) mit der unteren Grenze t_1 auf, so hat man jetzt in den ersten drei Gleichungen Raumintegrale hinzuzufügen, die gemäß (3a) die vorher bestimmten Werte $u(Q, t_1)$, $v(Q, t_1)$, $w(Q, t_1)$ enthalten und von der Form sind

$$\iiint_{(\mathfrak{A}_{t_0})} \Gamma(P, Q, t, t_1) \begin{Bmatrix} u(Q, t_1) \\ v(Q, t_1) \\ w(Q, t_1) \end{Bmatrix} d\tau_Q .$$

Diese bekannten Funktionen sind jetzt als erste Näherungswerte für $v(P, t)$ und $w(P, t)$ zu verwenden, während für $u(P, t)$ das Oberflächenintegral hinzukommt. Die Iteration ist dann entsprechend durchzuführen und liefert die Fortsetzung des Lösungssystems in einem Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$. In dieser Weise fortfahrend erkennt man, daß von jedem beliebigen Zeitpunkte t^* $(0 \leqq t^* \leqq T)$ aus, der in der beschriebenen Weise von $t = 0$ aus mit endlich vielen Schritten erreichbar ist, ein weiteres Intervall rechts von t^* gefunden werden kann, in welches die Lösung fortgesetzt werden kann. Demnach ist die Fortsetzung nach einer bekannten Schlußweise auf ein beliebiges abgeschlossenes Zeitintervall hin ausdehnbar.

Bei vorgegebenen Randwerten von p ist das System u, v, w, p offenbar auch eindeutig bestimmt.

Berlin-Frohnau, Kreuzritterstr. 3

(Eingegangen am 22. Juni 1957)

Bergman, S.
Math. Zeitschr. 72, 294—306 (1960)

The number of intersection points of two analytic surfaces in the space of two complex variables*)

To the memory of Leon Lichtenstein

By
Stefan Bergman

§ 1. Domains with a distinguished boundary surface and its role in the theory of functions of several complex variables

One of the problems of modern analysis is to unify methods in various fields of this discipline. In this connection it is important to study methods which generalize results of the theory of functions of one complex variable to the case of n variables [1]).

When we attempt to carry out this generalization we encounter the following difference. While every plane simply connected domain with two (or more) boundary points can be mapped into the interior of the unit circle, and therefore we have in many respects the same situation for all domains indicated above, in the case of two (and $n, n < \infty$) variables we encounter several types of domains. In every type we find a different behaviour of functions of two variables [2]). In the case of two variables the bicylinder is the domain of the simplest type. It has a very interesting characteristic property; on its (three dimensional) boundary lies a two-dimensional manifold

*) Work done under contract with the Office of Naval Research.

1) We note that many of these results can then be generalized to the theory of linear partial differential equations, differential geometry (the study of Kähler manifolds) and other chapters of analysis and geometry.

2) When considering functions of two (and several) complex variables it is useful to classify domains. (See [1].) A manifold lying in $\mathfrak{m}^3$, the boundary of $\mathfrak{B}$, and possessing the property that to every point P of this manifold there exists an analytic function f such that $|f(P)|$ is larger than $|f|$ at every other point of $\overline{\mathfrak{B}}$ is denoted as the maximum manifold of $\mathfrak{B}$. If the maximum manifold does not coincide with the whole boundary of the domain, in particular, if it is a two dimensional manifold (maximum surface) certain methods of one complex variable (e.g., procedures used in the derivation of the lemma of Schwarz) can be generalized to the case of two variables. (In the case of n variables we have, instead of a surface, an n dimensional manifold lying on the $(2n-1)$ dimensional boundary surface of the domain.) If the maximum surface has certain additional properties (in which case it is denoted as the distinguished boundary surface) there exists a generalized Cauchy formula ([2], [4], [6], [7], [26], [28], [29]). Introducing then the functions of an extended class (see [3], [17], [18], [19], [21], [22]) one can generalize Nevanlinna's theory of value distributions of one and of pairs of analytic functions of two complex variables ([9], [15], [20]). In this case one also obtains various results about the behavior of the functions in the neighborhood of the distinguished boundary surface ([3], [13], [16]), as well as other generalizations of results in the theory of functions of one variable. (Numbers in brackets refer to the bibliography, p. 306.)

which from the function theoretical point of view plays the role of the boundary curve of a plane domain. For instance, in the case of the bicylinder the generalized Cauchy formula

$$(1) \qquad f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1|=1} \int_{|\zeta_2|=1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\prod_{k=1}^{2} (\zeta_k - z_k)} d\zeta_1 d\zeta_2$$

holds, permitting one to express the value of the function inside the domain in terms of the values on the distinguished boundary surface. (The representation (1) can be, of course, generalized to the case of other product domains.) It can be shown that the bicylinder has a distinguished boundary surface possessing the above mentioned property. One realizes almost immediately that the behavior of functions in the hypersphere $[|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqq 1]$ differs completely from that in the bicylinder $[|z_1| \leqq 1, |z_2| \leqq 1]$. It is impossible for the hypersphere to have a distinguished boundary surface. Since to every point P of the boundary $[|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1]$ one can find a function $f_P(z_1, z_2)$ which is larger at P than at any other point of $[|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqq 1]$, an analogue of (1) is impossible. Thus we see that, in the case of two variables, among the simplest domains there exist domains of different (function theoretical) structure.

When approaching the question of the generalization of the theory of one variable one immediately realizes that the domains with a distinguished boundary surface represent a class which admits the generalization of many properties of functions of one variable, which generalizations are not valid in domains of other type. Domains which are bounded by finitely many segments of analytic hypersurfaces

$$(2) \qquad \Phi_\nu(z_1, z_2, \lambda_\nu) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

possess a distinguished boundary surface. Here Φ_ν are continuously differentiable functions of the complex variables z_1, z_2, and of the real variable λ_ν; for every fixed value of λ_ν the function Φ_ν is an analytic function of the variables z_1, z_2 which is regular in a sufficiently large domain.

As has been shown by Weil [28], [29] and by the author [2], [6], [7] in the case of two variables[3]), a generalized Cauchy formula is valid for these domains. See also [26]. Recently it has been shown [12] that one can determine functions which are orthogonal[4]) with respect to the distinguished boundary surface. Since one can use an arbitrary weighting function, one obtains a variety of formulas representing the function inside the domain in terms of the values on the distinguished boundary surface[5]).

[3]) Recently this last formula has been generalized to the case of n variables.

[4]) These functions represent a generalization of functions introduced in the case of one variable in [27].

[5]) In classification of domains, in addition to the totality of analytic functions regular in $\mathfrak{M}$ the class $L^2(\mathfrak{M})$ (i.e., the class of analytic functions $g(z_1, z_2)$ for which $\int_{\mathfrak{M}} |g|^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \infty$) has been used. Then the maximum surface can be characterized, for instance, by the behavoir of the kernel function when approaching the distinguished boundary surface. See [10], [11], [14], [15] and papers mentioned there.

The residue theorem is a powerful tool in the theory of functions of one complex variable. In particular, writing

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}^1}\frac{g'(\zeta)}{[g(\zeta)-a]}\,d\zeta, \tag{3}$$

where $\mathfrak{c}^1$ is the boundary curve of a simply connected domain $\mathfrak{B}^2$, one obtains the number of a-points[6]) in $\mathfrak{B}^2$ of a regular function of one complex variable. In the present paper a formula is derived for the number of points where a pair of functions $\{g(z_1, z_2), f(z_1, z_2)\}$ assumes the value $\{a_1, a_2\}$[7]) in a domain $\mathfrak{M}$. The domain $\mathfrak{M}$ is bounded by two segments of analytic hypersurfaces (2.3)[8]) and (2.4) and has the distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$; the integration is taken over $\mathfrak{D}^2$. (See Theorem 2.2.)

By writing

$$U(\xi, \eta) = \log|g(\zeta)| \tag{4}$$

one obtains a formula yielding a relation between the number of minima and minimaxes of the harmonic function U and the connectivity of the domain. For details see [*24*] p. 6.

Using the Morse theory of critical points [*25*] HEINS and MORSE [*24*], [*25*] derived in the case of one complex variable a formula connecting the number of critical points and the connectivity of the domain. In § 3 several remarks are made in connection with the generalization of the Morse-Heins theory to the case of two complex variables.

The author wishes to thank Z. CHARZYNSKI and ALBERT HURD for their help in the preparation of the present paper.

§ 2. An integral formula for the number of (a_1, a_2)-points of a pair of functions in a domain with a distinguished boundary surface

In the present section we shall derive a formula for the number of points $(z_1, z_2) \in \overline{\mathfrak{M}}$ and satisfying simultaneously two equations,

$$g(z_1, z_2) = 0 \tag{1}$$

and

$$f(z_1, z_2) = 0. \tag{2}$$

$\mathfrak{M}$ is a domain with a distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$. $g(z_1, z_2)$ and $f(z_1, z_2)$ are analytic functions of two complex variables which are regular in $\overline{\mathfrak{M}}$. (Hypothesis 1a.) They have no common factors[8a]) (Hyp. 1b).

When considering a function $h(z)$ of one variable regular in a simply connected domain $\mathfrak{P}^2$ (bounded by $\mathfrak{p}^1$) the formula $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{p}^1}\frac{h'(z)}{h(z)}\,dz$ yields the

[6]) I.e., points where $g(z) = a$.

[7]) I.e., points where $g(z_1, z_2) = a_1$, $f(z_1, z_2) = a_2$. Concerning the question of the value distribution of one function of two complex variables see [*9*], [*10*], [*15*].

[8]) (2.3) = formula (3) of § 2.

[8a]) I.e. they hav only finitely many common points in $\overline{\mathfrak{M}}$.

number of zeros of $h(z)$ in $\mathfrak{P}^2$. In the case of two variables we shall assume (Hyp. 2a) that the domain $\mathfrak{M}$ under consideration is bounded by two segments of analytic hypersurfaces

$$[z_1 - h_1(z_2, \lambda_1) = 0], \qquad 0 \leqq \lambda_1 \leqq 2\pi, \tag{3}$$

$$[z_2 - h_2(z_1, \lambda_2) = 0], \qquad 0 \leqq \lambda_2 \leqq 2\pi. \tag{4}$$

Here $h_k(z_{3-k}, \lambda_k)$ are twice continuously differentiable functions of the complex variable z_{3-k} and of the real variable λ_k; for every fixed value of λ_k, h_k is an analytic function of z_{3-k} regular in the projection of $\mathfrak{M}$ on the z_{3-k}-plane; h_k is periodic in λ_k, $k = 1, 2$.

Let $\overline{\mathfrak{F}}_1^2(\lambda_1)$ $[\overline{\mathfrak{F}}_2^2(\lambda_2)]$ be the part of the analytic surface (3) [respectively of 4)] belonging to the boundary $\mathfrak{m}^3$ of $\mathfrak{M}$ and let

$$\overline{\mathfrak{i}}_k^3 = \sum_{\lambda_k = 0}^{2\pi} \overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k). \tag{5}$$

Here $\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$ is given by

$$z_k = h_k(z_{3-k}, \lambda_k), \qquad z_{3-k} \in \mathscr{P}_{3-k}\left(\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)\right), \qquad k = 1, 2.$$

$\mathscr{P}_{3-k}\left(\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)\right)$, $k = 1, 2$ is the projection[9]) of $\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$ on the z_{3-k}-plane. We assume that for every $\lambda_k = \text{const}$ (except perhaps for finitely many points of $[0 \leqq \lambda_k \leqq 2\pi]$) $\mathscr{P}_{3-k}\left(\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)\right)$ is a simply connected schlicht domain bounded by a differentiable curve (Hyp. 2b).

The intersection

$$\mathfrak{D}^2 = \overline{\mathfrak{i}}_1^3 \cap \overline{\mathfrak{i}}_2^3 \tag{6}$$

forms the distinguished boundary surface of $\mathfrak{M}$. The surface $\mathfrak{D}^2$ can be written in the form

$$z_k = \zeta_k(\lambda_1, \lambda_2) \equiv h_k\left(\zeta_{3-k}(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_k\right), \qquad k = 1, 2 \tag{7}$$

where $\zeta_k(\lambda_1, \lambda_2)$, $k = 1, 2$, are single valued, differentiable, periodic functions of the real variables λ_1, λ_2 (Hyp. 2c).

Also

$$\mathfrak{D}^2 = \sum_{\lambda_1 \in \mathfrak{s}_1^1} \mathfrak{i}_1^1(\lambda_1) = \sum_{\lambda_2 \in \mathfrak{s}_2^1} \mathfrak{i}_2^1(\lambda_2),$$

where

$$\mathfrak{s}_k^1 = [0 \leqq \lambda_k \leqq 2\pi].$$

Here $\mathfrak{i}_k^1(\lambda_k)$ (the image of the boundary of $\mathscr{P}_{3-k}(\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k))$) is, except perhaps for finitely many values of λ_k a differentiable closed curve, which is the boundary of $\mathfrak{F}_k^2(\lambda_k)$.

For every $\lambda_1 \in \mathfrak{s}_1^1$ (except perhaps finitely many λ_1) this curve is defined by $\mathfrak{i}_1^1(\lambda_1) = [z_k = \zeta_k(\lambda_1, \lambda_2),\ k = 1, 2,\ 0 \leqq \lambda_2 \leqq 2\pi]$. A similar representation holds

[9]) $\mathscr{P}_{3-k}[\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)]$ is a one-to-one image of $\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$ in the z_{3-k}-plane. It should be noted that we could replace Hypothesis 2b by a weaker one, namely, by the assumption that $\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$ is a one-to-one image of a schlicht domain in an auxiliary ζ-plane.

for $\mathfrak{i}_2^1(\lambda_2)$ (Hyp. 2d). The intersection of the surface defined by (1) with $\mathfrak{M}$ is a simply connected segment $\mathfrak{T}^2$ of the surface (1) (Hyp. 3a). The segment $\mathfrak{T}^2$ of (1) can be represented in the form

$$z_k = \varphi_k(\mathsf{Z}), \qquad k = 1, 2, \qquad |\mathsf{Z}| \leqq 1, \tag{8}$$

where $\left|\frac{d\varphi_k(\mathsf{Z})}{d\mathsf{Z}}\right| \neq 0$ for $|\mathsf{Z}| \leqq 1$; (8) is a one-to-one mapping (Hypothesis 3b)[9a]). We assume that there are no intersection points of (1) and (2) which lie on $\mathfrak{m}^3$ (Hyp. 3c). (If this hypothesis is not satisfied then the formulae derived for N in the following have to be slightly modified.)

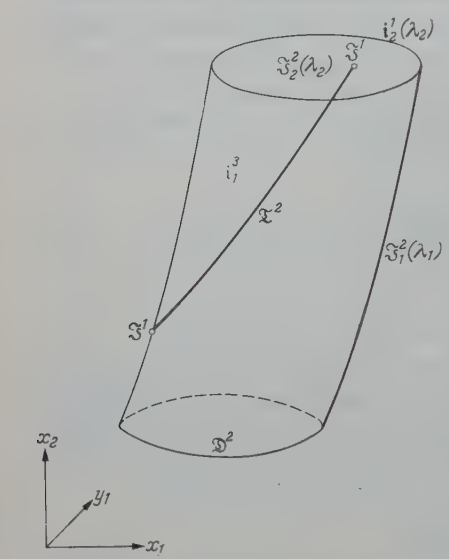

Fig. 1. Intersection of $\mathfrak{M}$ with $y_2 = y_2^0$. (Accordingly $\mathfrak{i}_1^3$, $\mathfrak{i}_2^3$, etc., are the intersections the corresponding manifold with $\gamma_2 = \gamma_2^0$)

LEMMA 2.1.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tilde{\mathsf{Z}}|=1} d \log f[\varphi_1(\tilde{\mathsf{Z}}), \varphi_2(\tilde{\mathsf{Z}})] \tag{9}$$

is the number of intersection points of $g=0$ *and* $f=0$ *in* $\mathfrak{M}$.

PROOF. According to the Hyp. (1b) g and f have no common factors. $f[\varphi_1(\mathsf{Z}), \varphi_2(\mathsf{Z})]$ can vanish in $\mathfrak{M}$ only at points of $g=0$ which lie on $[f=0] \cap \mathfrak{M}$. Therefore (9) yields the number of such points lying in $\mathfrak{T}^2$, the intersection of $g=0$ with $\mathfrak{M}$.

The boundary of the segment $\mathfrak{T}^2$ is a closed curve $\mathfrak{J}^1$ which lies entirely in $\mathfrak{m}^3$, the boundary of $\mathfrak{M}$ (Hyp. 3b*). Since $\mathfrak{m}^3 = \mathfrak{i}_1^3 + \mathfrak{i}_2^3$ every point of $\mathfrak{J}^1$ lies either in $\mathfrak{J}_1^1 = \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{i}_1^3$ or $\mathfrak{J}_2^1 = \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{i}_2^3$. Writing $\mathsf{Z} = \varrho \exp(i\tau)$, $\tilde{\mathsf{Z}} = \exp(i\tau)$ we assume that $\mathfrak{J}^1$ is a continuous image of $\mathfrak{p}^1 = [\tilde{\mathsf{Z}} = \exp(i\tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 2\pi]$ under (8) with positive orientation corresponding to increasing values of τ (Hyp. 2e). Since every point of $\mathfrak{J}_k^1$ lies in $\mathfrak{i}_k^3$, to every point $(z_1, z_2) = (\varphi_1(\tilde{\mathsf{Z}}), \varphi_2(\tilde{\mathsf{Z}}))$ of $\mathfrak{J}^1$ there corresponds $\lambda_1 = \lambda_1(\tau)$ or $\lambda_2 = \lambda_2(\tau)$ so that (z_1, z_2) lies either in $\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1)$ or in $\mathfrak{J}_2^2(\lambda_2)$. We assume (Hyp. 1c) that the set $\tilde{\mathfrak{e}}^1 = [0 \leqq \tau \leqq 2\pi]$ can be broken up into finitely many sufficiently small intervals $\tilde{\mathfrak{e}}_{k\nu}^1$ (of positive length) and finitely many points so that the arcs $[\tilde{\mathsf{Z}} = \exp(i\tau), \tau \in \tilde{\mathfrak{e}}_{k\nu}^1]$ are mapped into arcs of $\mathfrak{J}_k^1$. We assume simultaneously (Hyp. 1d) that the function $\lambda_k(\tau)$ is continuously differentiable and monotonic in every $\tilde{\mathfrak{e}}_{k\nu}^1$. Consequently for λ_k belonging to a set $\mathfrak{e}_{k\nu}^1$ (the image of $\tilde{\mathfrak{e}}_{k\nu}^1$ under $\lambda_k(\tau)$), τ is a continuously differentiable function of λ_k, say

$$\tau = \tau_{k\nu}(\lambda_k), \qquad \lambda_k \in \mathfrak{e}_{k\nu}^1.$$

[9a]) We assume that to values $|\mathsf{Z}| = 1$ correspond points $(\varphi_1(\mathsf{Z}), \varphi_2(\mathsf{Z}))$ lying in $\mathfrak{m}^3$.

Thus for $\mathfrak{J}^1_{1\nu} = [\tilde{\mathsf{Z}} = \exp(i\tau_{1\nu}(\lambda_1)),\ \lambda_1 \in \mathfrak{c}^1_{1\nu}]$ we have the representation $\mathscr{J}_1$:

$$z_1 = h_1[\varphi_2(\exp(i\tau(\lambda_1))), \lambda_1], \qquad z_2 = \varphi_2[\exp(i\tau_{1\nu}(\lambda_1))], \tag{10}$$

and analogous formulae for

$$\mathfrak{J}^1_{2\nu} = [\tilde{\mathsf{Z}} = \exp(i\tau_{2\nu}(\lambda_2)),\ \lambda_2 \in \mathfrak{c}^1_{2\nu}].$$

We will write $\mathfrak{J}^1_{k\nu} = \mathscr{J}(\mathfrak{c}^1_{k\nu})$, $\mathfrak{c}^1_k = \mathop{\mathsf{S}}_{\nu} \mathfrak{c}^1_{k\nu}$, $\mathfrak{J}^1_k = \mathscr{J}(\mathfrak{c}^1_k)$ in what follows. Let $\mathscr{P}_{3-k}[\mathscr{J}(\mathfrak{c}^1_{k\nu})]$ denote the projection of $\mathscr{J}(\mathfrak{c}^1_{k\nu})$ on the z_{3-k}-plane, and let

$$\begin{cases} \mathscr{J}(\mathfrak{c}^1_{1\nu}) = [z_1 = \tilde{z}_1(z_2), z_2 = z_2, z_2 \in \mathscr{P}_2(\mathscr{J}_1(\mathfrak{c}^1_{1\nu}))], \\ \mathscr{J}(\mathfrak{c}^1_{2\nu}) = [z_2 = z_2, z_2 = \tilde{z}_2(z_1), z_1 \in \mathscr{P}_1(\mathscr{J}_2(\mathfrak{c}^1_{2\nu}))] \end{cases} \tag{11}$$

where $\tilde{z}_1(z_2)$ and $\tilde{z}_2(z_1)$ are single valued functions which we obtain by eliminating λ_1 from (10) and by eliminating λ_2 from an analogous expression, respectively (Hyp. 1e). We assume that

$$\left| \frac{|d\tilde{z}_{3-k}(z_k)|^2 + |dz_k|^2}{|dz_k|^2} \right| \leqq A < \infty \tag{12}$$

(Hyp. 1f).

Lemma 2.2. *Under the conditions formulated above the relation*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{p^1} d\log f[\varphi_1(\tilde{\mathsf{Z}}), \varphi_2(\tilde{\mathsf{Z}})] \\ = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\mathsf{S}\,\mathfrak{c}^1_{1\nu}} \left(\frac{\{f_{(s)}[h_1(z_2, \lambda_1), z_2]; (-1)^s \varphi'_s(\tilde{\mathsf{Z}})\}\ (h_1(z_2, \lambda_1), \varphi'_2(\tilde{\mathsf{Z}}))}{f[h_1(z_2, \lambda_1), z_2]\ \varphi'_1(\tilde{\mathsf{Z}})} \right) d\lambda_1 \\ + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\mathsf{S}\,\mathfrak{c}^1_{2\nu}} \left(\frac{\{f_{(s)}[z_1, h_2(z_1, \lambda_2)]; (-1)^s \varphi'_s(\tilde{\mathsf{Z}})\}\ (h_2(z_1, \lambda_2), \varphi'_1(\tilde{\mathsf{Z}}))}{f[z_1, h_2(z_2, \lambda_2)]\ \varphi'_2(\tilde{\mathsf{Z}})} \right) d\lambda_2 \end{cases} \tag{13}$$

holds. Here

$$\{f_{(s)}[h_1(z_2, \lambda_1), z_2]; (-1)^s \varphi'_s(\tilde{\mathsf{Z}})\} = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial z_1} & -\varphi'_2(\tilde{\mathsf{Z}}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z_2} & \varphi'_1(\tilde{\mathsf{Z}}) \end{matrix} \right|_{z_1 = h_1(z_2, \lambda_1)} \tag{14a}$$

$$\{f_{(s)}[z_1, h_2(z_1, \lambda_2)]\ (-1)^s \varphi'_s(\tilde{\mathsf{Z}})\} = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial z_1} & -\varphi'_2(\tilde{\mathsf{Z}}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z_2} & \varphi'_1(\tilde{\mathsf{Z}}) \end{matrix} \right|_{z_2 = h_2(z_1, \lambda_2)} \tag{14b}$$

$$(h_s(z_{3-s}, \lambda_s), \varphi'_s(\tilde{\mathsf{Z}})) = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial h_s}{\partial z_{3-s}} & -1 \\ \dfrac{\partial h_s}{\partial \lambda_s} & i\varphi'_{3-s}(\tilde{\mathsf{Z}}) \exp(i\tau) \dfrac{d\tau}{d\lambda_s} \end{matrix} \right| \tag{15}$$

$$\tilde{\mathsf{Z}} = \exp(i\tau), \qquad z_k = \varphi_k(\exp(i\tau)), \qquad \tau = \tau_{k\nu}(\lambda_k), \qquad \lambda_k \in \mathop{\mathsf{S}}_{\nu} \mathfrak{c}^1_{k\nu}. \tag{16}$$

PROOF. The integrand of the left hand side of (13) can be written in the form

$$\frac{f_{\mathbf{Z}}[\varphi_1(\mathbf{Z}), \varphi_2(\mathbf{Z})]}{f[\varphi_1(\mathbf{Z}), \varphi_2(\mathbf{Z})]}\, d\mathbf{Z}, \qquad (\mathbf{Z} \equiv \widetilde{\mathbf{Z}}). \tag{17}$$

In accordance with 1d the integration curve can be divided into two parts, $\mathfrak{p}^1 = \mathfrak{p}_1^1 + \mathfrak{p}_2^1$, and the integral on the left hand side of (13) can be written as a sum of two integrals. The first integral is given on the left hand side of (18); the second integral is built in an analogous way with $\mathfrak{p}_1^1$ replaced by $\mathfrak{p}_2^1$. Since the integrand on the left hand side of (18) is invariant with respect to a transformation of variable of integration

$$\int_{\mathfrak{p}_1^1} \frac{f_{\mathbf{Z}}[\varphi_1(\mathbf{Z}), \varphi_2(\mathbf{Z})]}{f[\varphi_1(\mathbf{Z}), \varphi_2(\mathbf{Z})]}\, d\mathbf{Z} = \int_{\mathscr{P}_1[\mathscr{J}(\mathfrak{c}_1^1)]} \frac{f_{z_1}(z_1, \tilde{z}_2(z_1))}{f(z_1, \tilde{z}_2(z_1))}\, dz_1; \tag{18}$$

here $\{z_1, \tilde{z}_2(z_1)\}$ are the points of $\mathscr{J}(\mathfrak{c}_1^1)$; $\mathscr{P}_1[\mathscr{J}(\mathfrak{c}_1^1)]$ is the projection of $\mathscr{J}(\mathfrak{c}_1^1)$ on the z_1-plane.

Now we use the fact that $\mathscr{J}(\mathfrak{c}_1^1)$ lies in $\mathfrak{i}_1^3$ and therefore for every point of $\mathscr{J}(\mathfrak{c}_1^1)$ for a conveniently chosen value of λ_1

$$\{z_1, \tilde{z}_2(z_1)\} = \{h_1(z_2, \lambda_1), z_2\}, \qquad (z_2 \equiv \tilde{z}_2(z_1)) \tag{19}$$

holds. (See Hyp. 1e.)

Consequently we can replace $f(z_1, z_2) \equiv f(z_1, \tilde{z}_2(z_1))$ in the integrand on the right hand side of (18) by $f[h_1(z_2, \lambda_1), z_2]$. Since every point of $\mathfrak{p}_1^1$ lies on $|\mathbf{Z}| = 1$, according to (8) $z_2 = \varphi_2[\exp(i\tau)]$, where $\tau \in \sum_{\nu} \tilde{\mathfrak{e}}_{1\nu}^1$.

Further

$$\frac{df(z_1, \tilde{z}_2(z_1))}{d\mathbf{Z}} = \left[\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1}\, \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} + \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}\, \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}}\right], \tag{20}$$

$$\begin{cases} d\mathbf{Z} \equiv \left[\dfrac{dz_1}{d\mathbf{Z}}\right]^{-1} dz_1 \\ \quad = \left[\dfrac{d\varphi_1(\mathbf{Z})}{d\mathbf{Z}}\right]^{-1} \left[i\left(\dfrac{\partial h_1(z_2, \lambda_1)}{\partial z_2}\right) \dfrac{\partial \varphi_2(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} \exp(i\tau)\, \dfrac{d\tau}{d\lambda_1} + \dfrac{\partial h_1(z_2, \lambda_1)}{\partial \lambda_1}\right] d\lambda_1, \\ \lambda_1 \in \mathfrak{c}_{1\nu}^1, \quad \mathbf{Z} = \widetilde{\mathbf{Z}}. \end{cases} \tag{21}$$

In accordance with (3), (8), (16) in (20) and (21) $z_1 = h_1[\varphi_2(\exp(i\tau(\lambda_1)), \lambda_1]$, $z_2 = \varphi_2[\exp(i\tau(\lambda_1))]$, $\widetilde{\mathbf{Z}} = \exp(i\tau(\lambda_1))$. Combining (20) and (21) and dividing by $f[h_1(z_2, \lambda_1), z_2]$ we obtain the integrand of the first expression on the right hand side of (13). We obtain the second term in an analogous way.

THEOREM 2.1. *The number N of the intersection points of the segments of the surfaces* (1) *and* (2) *which lie in the domain* $\mathfrak{M}$ *bounded by the segments* $\mathfrak{i}_1^3$ *and* $\mathfrak{i}_2^3$ (*see* (3) and (4)) *equals*

$$N = N_1 + N_2 \tag{22}$$

where

$$(23)\quad \left\{ N_1 = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\lambda_1 \in \sum_{\nu} c_{1\nu}} \int_{\lambda_2=0}^{2\pi} \frac{[f_{(s)}(\zeta_1,\zeta_2);(-1)^s \varphi_s'(\tilde{Z})]\,(h_1(\zeta_2,\lambda_1),\varphi_2'(\tilde{Z}))}{f(\zeta_1,\zeta_2)\,\varphi_1'(\tilde{Z})\,(\zeta_2 - z_2)} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)} (\zeta_2 - \zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)} (z_2 - \zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))} \frac{d\zeta_2}{d\lambda_2}\, d\lambda_1\, d\lambda_2. \right.$$

Here $\times$ *denotes the multiplication sign and*

$$(24)\quad [f_{(s)}(\zeta_1,\zeta_2);(-1)^s \varphi_s'(\tilde{Z})] = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \zeta_1} & -\varphi_2'(\tilde{Z}) \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta_2} & \varphi_1'(\tilde{Z}) \end{vmatrix}$$

$\zeta_k = \zeta_k(\lambda_1, \lambda_2)$, $0 \leqq \lambda_k \leqq 2\pi$ *lies in the distinguished boundary surface;* $\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n_1(\lambda_1)$ *are the zeros of the function* $f(z_1, z_2)$ *in the lamina* $\overline{\mathfrak{J}}_1^2(\lambda_1)$. *For* N_2 *an analogous formula holds.*

Proof. We consider the integrand of the first integral on the right hand side of (13). For a fixed λ_1 (and $\tilde{Z} = \exp(i\tau(\lambda_1))$) and varying z_2 the integrand is a function of one complex variable defined in the domain $\mathscr{P}_2[\overline{\mathfrak{J}}_1^2(\lambda_1)]$ of the z_2-plane. ($\mathscr{P}_2[\overline{\mathfrak{J}}_1^2(\lambda_1)]$ is the projection of $\overline{\mathfrak{J}}_1^2(\lambda_1)$ on the z_2-plane.) By Cauchy's theorem

$$\left\{ \frac{\{f_{(s)}[h_1(z_2,\lambda_1),z_2];(-1)^s \varphi_s'(\tilde{Z})\}\,(h_1(z_2,\lambda_1),\varphi_2'(\tilde{Z}))}{f[h_1(z_2,\lambda_1),z_2]\,\varphi_1'(\tilde{Z})} \right.$$
$$\left. = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{P}_2(\overline{\mathfrak{J}}_1^2(\lambda_1))} \frac{\{f_{(s)}[h_s(\zeta_2,\lambda_1),\zeta_2];(-1)^s \varphi_s'(\tilde{Z})\}\,(h_1(\zeta_2,\lambda_1),\varphi_2'(\tilde{Z}))\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(\zeta_2 - \zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{f[h_1(\zeta_2,\lambda_1),\zeta_2]\,\varphi_1'(\tilde{Z})\,(\zeta_2 - z_2)\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(z_2 - \zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}\, d\zeta_2 \right.$$

$$\left\{ \frac{\{f_{(s)}[z_1,h_2(z_1,\lambda_2)];(-1)^s \varphi_s'(\tilde{Z})\}\,(h_2(z_1,\lambda_2),\varphi_1'(\tilde{Z}))}{f[z_1,h_2(z_1,\lambda_2)]\,\varphi_2'(\tilde{Z})} \right.$$
$$\left. = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{P}_1(\overline{\mathfrak{J}}_2^1(\lambda_2))} \frac{\{f_{(s)}(\zeta_1,\zeta_2);(-1)^s \varphi_s'(\tilde{Z})\}\,((h_2(\zeta_1,\lambda_2);\varphi_1'(\tilde{Z}))\prod_{\nu=1}^{n_2(\lambda_2)}(\zeta_1 - \zeta_1^{(\nu)}(\lambda_2))}{f[\zeta_1,h_2(\zeta_1,\lambda_2)]\,\varphi_2'(\tilde{Z})\,(\zeta_1 - z_1)\prod_{\nu=1}^{n_2(\lambda_2)}(z_1 - \zeta_1^{(\nu)}(\lambda_2))}\, d\zeta_1. \right.$$

Replacing $h_1(\zeta_2, \lambda_1)$ by ζ_1 and $d\zeta_2$ by $\frac{\partial \zeta_2(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2}\, d\lambda_2$ and replacing the integrand of the first term on the right-hand side of (13) by the right-hand side of (25) we obtain (23).

Remark 1. Theorem 1 can be easily generalized to the case where $f(z_1, z_2)$ is a meromorphic function and can be represented in the form

$$(27)\quad f(z_1,z_2) = \frac{f_1(z_1,z_2)}{f_2(z_1,z_2)}$$

in the domain $\overline{\mathfrak{M}}$.

In this case instead of the factor $\dfrac{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(z_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}$ we have to write

$$\frac{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(z_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}\cdot\frac{\prod_{\nu=1}^{m_1(\lambda_1)}(z_2-\xi_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{m_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\xi_2^{(\nu)}(\lambda_1))}$$

where $\xi_2^{(\nu)}(\lambda_1)$, $\nu=1, 2, \ldots, m_1(\lambda_1)$ are the poles of $f(z_1, z_2)$ in the lamina $\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1)$.

REMARK 2. By replacing (1), (2) by a pair of equations

$$g(z_1, z_2)-a_1=0, \qquad f(z_1, z_2)-a_2=0 \tag{28}$$

we can obtain a formula yielding the number of (a_1, a_2)-points of the pair $\big(g(z_1, z_2),\ f(z_1, z_2)\big)$ in $\mathfrak{M}$.

When applying the Cauchy formula to the product of two functions $\tilde{f}(z)$ and $\tilde{g}(z)$ regular in the domain $\mathfrak{P}^2$, bounded by $\mathfrak{q}^1$ we can write either

$$\tilde{g}(z)\tilde{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\tilde{g}(z)\int_{\mathfrak{q}^1}\frac{\tilde{f}(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)}, \qquad z\in\mathfrak{P}^2 \tag{29}$$

or

$$\tilde{g}(z)\tilde{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{q}^1}\frac{\tilde{g}(\zeta)\tilde{f}(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)}, \qquad z\in\mathfrak{P}^2. \tag{30}$$

The representation (23) corresponds to the first formula. In deed, the values of $f(\zeta_1, \zeta_2)$ and its derivatives are taken at the points of the distinguished boundary surfaces but the values of $g(z_1, z_2)$ are taken at $\{z_1, z_2\}=\{\varphi_1(\tilde{\mathsf{Z}}), \varphi_2(\tilde{\mathsf{Z}})\}$ along the boundary curve of the segment $\overline{\mathfrak{T}^2}$, intersection of $[g(z_1, z_2)=0]$ with the (three-dimensional) boundary $\mathfrak{m}^3$ of $\mathfrak{M}$. This curve lies in $\mathfrak{m}^3$, but, in general, *not* on the distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$ of $\mathfrak{M}$.

Under certain additional hypotheses (see below) in the following we shall derive a formula corresponding to (30).

In the integrand of the first term of the right-hand side of (13) we shall replace the variable $\tilde{\mathsf{Z}}$, by a function of z_2 and λ_1, and in the second term by a function of z_1 and λ_2, under the following additional hypotheses: According to (8), $z_2=\varphi_2(\mathsf{Z})$. Therefore if $\varphi_2'(\mathsf{Z})\neq 0$, we can write (locally)

$$\mathsf{Z}=\hat{\mathsf{Z}}(z_2). \tag{31}$$

We assume (Hyp. 1g) that $\big(\hat{\mathsf{Z}}_{z_2}(z_2)\big)^{-1}=\vartheta_2(z_2)$ is a regular function in a simply connected domain which includes $\mathsf{S}_{0\leq\lambda_1\leq 2\pi}\mathscr{P}_2[\overline{\mathfrak{J}_1^2}(\lambda_1)]$.

According to (8) and (31) [9b])

$$\frac{d\varphi_2(\mathsf{Z})}{d\mathsf{Z}}=\frac{dz_2}{d\mathsf{Z}}=[\hat{\mathsf{Z}}_{z_2}(z_2)]^{-1}=\vartheta_2(z_2)\equiv\vartheta_2(z_2, \lambda_1). \tag{32}$$

[9b]) The apparent variable λ_1 is introduced so as to have symmetrical expressions for φ_1' and φ_2'.

Since, according to (3), (10), at every point (z_1, z_2) of the curve $\mathcal{J}(\mathfrak{c}_{1\nu}^1)$ we have $z_1 = h_1(z_2, \lambda_1)$

$$\frac{d\varphi_1(Z)}{dZ} = \frac{\partial h_1(z_2, \lambda_1)}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial Z} + \frac{\partial h_1(z_2, \lambda_1)}{\partial \lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dZ}$$
$$= \frac{\partial h_1(z_2, \lambda_1)}{\partial z_2}\vartheta_2(z_2) + \frac{\partial h_1(z_2, \lambda_1)}{\partial \lambda_1}\Big/\frac{d\exp(i\tau(\lambda_1))}{d\lambda_1} \equiv \vartheta_1(z_2, \lambda_1).$$

(We note that for $(z_1, z_2) \subset \mathcal{J}(\mathfrak{c}_{1\nu}^1)$, $Z = \hat{Z} = \exp(\tau_{1\nu}(\lambda_1))$.) According to Hyp. 1g and for a fixed λ_1, $\vartheta_1(z_2, \lambda_1)$ and $\vartheta_2(z_2, \lambda_1)$ are analytic functions of complex variable z_2, regular in $\mathcal{P}_2(\overline{\mathfrak{J}}_1^2(\lambda_1))$. Therefore we can write the integrand of the first term on the right-hand side of (13)

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\{f_{(s)}[h_1(z_2,\lambda_1), z_2]; (-1)^s\vartheta_s(z_2,\lambda_1)\}(h_1(z_2,\lambda_1), \vartheta_2(z_2,\lambda_1))}{f[h_1(z_2,\lambda_1), z_2]\,\vartheta_1(z_2,\lambda_1)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}_2^1} \frac{\{f_{(s)}[h_1(\zeta_2,\lambda_1), \zeta_2]; (-1)^s\vartheta_s(\zeta_2,\lambda_1)\}(h_1(\zeta_2,\lambda_1), \vartheta_2(\zeta_2,\lambda_1))}{f[h_1(\zeta_2,\lambda_1), \zeta_2]\,\vartheta_1(\zeta_2,\lambda_1)\,(\zeta_2 - z_2)} \times \\ &\times \frac{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(\zeta_2 - \zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1)) \prod_{\nu=1}^{N_1(\lambda_1)}(\zeta_2 - \eta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(z_2 - \zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1)) \prod_{\nu=1}^{N_1(\lambda_1)}(z_2 - \eta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}\frac{d\zeta_2}{d\lambda_2}\,d\lambda_2. \end{aligned}\right.$$

Here $\eta_2^{(\nu)}(\lambda_1)$, $\nu = 1, 2, \ldots, N_1(\lambda_1)$ are zeros of $\vartheta_1(z_2, \lambda_1)$ in $\mathcal{P}_2(\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1))$, the projection of $\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1)$ on the z_2-plane.

THEOREM 2.2. *In the case where in addition to the hypotheses mentioned before the Hyp.* 1g *is satisfied, we have*

$$(22)\qquad N = N_1 + N_2$$

where

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} N_1 = &-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\lambda_1 \in \mathfrak{S}\mathfrak{c}_{1\nu}}\int_{\lambda_2=0}^{2\pi} \frac{[f_{(s)}(\zeta_1,\zeta_2); (-1)\,\vartheta_s(\zeta_2,\lambda_1)]\,(h_1(z_2,\lambda_1), \vartheta_2(z_2,\lambda_1))}{f(\zeta_1,\zeta_2)\,\vartheta_1(\zeta_2,\lambda_1)\,(\zeta_2 - z_2)} \times \\ &\times \frac{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(\zeta_2 - \zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1)) \prod_{\nu=1}^{N_1(\lambda_1)}(\zeta_2 - \eta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(z_2 - \zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1)) \prod_{\nu=1}^{N_1(\lambda_1)}(z_2 - \eta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}\frac{d\zeta_2}{d\lambda_2}\,d\lambda_2\,d\lambda_1. \end{aligned}\right.$$

Here [ ] *and* ( ) *are expressions introduced in* (24) *and* (15), $\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1)$ *are quantities described in the two last lines of the Theorem* 2.1 (p. 300); $\eta_2^{(\nu)}(\lambda_1)$ *are explained above.*

An analogous formula holds for N_2.

§ 3. The number of critical points of a function of two complex variables in a domain $\mathfrak{M}$

In the present section we shall consider an interesting special case of the problem considered in § 2, namely, the case where the functions [10]) (2.1) and

[10]) (2.n) = Formula (n) of § 2. The function p_{z_2}, the derivative of p with respect to z_2, is now the function f considered in § 2.

(2.2) are derivatives with respect to z_1 and z_2, respectively, of the same function, say of $p(z_1, z_2)$, i.e., we shall determine the number of points where simultanously

$$\frac{\partial p(z_1, z_2)}{\partial z_1} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p(z_1, z_2)}{\partial z_2} = 0 \tag{2}$$

in $\overline{\mathfrak{M}}$.

The points where (1) and (2) are satisfied are critical points of $P = \log|p(z_1, z_2)|$, so that N is now the number of critical points [10]) of P in $\overline{\mathfrak{M}}$. $p_{z_1}(z_1, z_2)$ and $p_{z_2}(z_1, z_2)$ play now the role of $g(z_1, z_2)$ and $f(z_1, z_2)$, respectively.

We assume that the hypotheses indicated in § 2 about p_{z_1} and p_{z_2} hold. It follows from (2) that [11])

$$f_{(1)}(z_1, z_2) = p_{z_1 z_1}(z_1, z_2), \tag{3}$$

$$f_{(2)}(z_1, z_2) = p_{z_2 z_2}(z_1, z_2). \tag{4}$$

Therefore in the integrand of (2.35) we have replaced $f_{(s)}(\zeta_1, \zeta_2)$ by the right hand side of (3) and (4).

REMARK 3. In a number of investigations MORSE and HEINS, (see [23], [24], [25] and papers mentioned there) applied topological methods in order to study critical points of a pseudo-harmonic function of two real variables. There arises the interesting problem of investigating how these methods can be generalized to the case of functions of two variables. If a twice continuously differentiable function is given in a closed domain then there exist relations between the number of its critical manifolds. This fact suggests enlarging the domain $\mathfrak{M}$ to a closed domain $\mathfrak{T}$ and continuing in a convenient way the function P into $\mathfrak{T}$. As will be indicated in the following this can be done in such a way that from the relations in $\mathfrak{T}$ corresponding relations for critical points in $\mathfrak{M}$ follow.

Suppose a domain $\mathfrak{M}$ of the kind described in § 2 is given in which a twice continuously differentiable function P is defined. By a one-to-one and twice continuously differentiable mapping $\mathscr{T}$ we transform $\mathfrak{M}$ into the bicylinder

$$\widetilde{\mathfrak{M}} \equiv \mathscr{T}(\mathfrak{M}) = [|\zeta_k| < 1, \quad k = 1, 2)]. \tag{5}$$

We form then three additional copies $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_3$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_4$ of $\widetilde{\mathfrak{M}}$ in wich the functions $\widetilde{P}_n(\zeta_1, \zeta_2)$, $n = 2, 3, 4$ are defined such that

$$\widetilde{P}_n(\zeta_1, \zeta_2) = \widetilde{P}(\zeta_1, \zeta_2), \qquad n = 2, 3, 4. \tag{6}$$

P goes into $\widetilde{P}(\zeta_1, \zeta_2)$ under $\mathscr{T}$.

[11]) It should be stressed that N represents the number of critical points where both derivatives vanish. On the other hand on the boundary of the domain lie maxima and minima points where the above derivatives do not vanish.

Let $\tilde{\mathfrak{i}}_k^3 = \mathscr{T}(\mathfrak{i}_k^3)$, $k=1, 2$, and $\tilde{\mathfrak{i}}_{kn}^3$, $k=1, 2$, $n=2, 3, 4$, be the corresponding parts of the boundaries of $\tilde{\mathfrak{M}}_n$, $n=2, 3, 4$. In order to obtain a closed manifold we shall "paste together" $\tilde{\mathfrak{M}}$ and $\tilde{\mathfrak{M}}_k$, $k=2, 3, 4$. Before joining $\tilde{\mathfrak{M}}$ with $\tilde{\mathfrak{M}}_k$, $k=2, 3, 4$ we insert a domain $\tilde{\mathfrak{S}}_{12}$ connecting $\tilde{\mathfrak{i}}_1^3 \equiv \mathscr{T}(\mathfrak{i}_1^3)$ with $\tilde{\mathfrak{i}}_{21}^3$, a domain $\tilde{\mathfrak{S}}_{13}$ connecting $\tilde{\mathfrak{i}}_2^3 \equiv \mathscr{T}(\mathfrak{i}_2^3)$ with $\mathfrak{i}_{32}^3$, $\tilde{\mathfrak{S}}_{23}$ connecting $\tilde{\mathfrak{i}}_{22}^3$ with $\tilde{\mathfrak{i}}_{42}^3$ and $\tilde{\mathfrak{S}}_{34}$ connecting $\tilde{\mathfrak{i}}_{31}^3$ with $\tilde{\mathfrak{i}}_{41}^3$. In $\tilde{\mathfrak{S}}_{MN}$, $M, N = 1, 2; 1, 3; 2, 4; 3, 4$; the continuation $\tilde{P}^*(\zeta_1, \zeta_2)$ of the functions $\tilde{P}(\zeta_1, \zeta_2)$, $\tilde{P}_n(\zeta_1, \zeta_2)$, $n=2, 3, 4$ is defined so that the new function is twice continuously differentiable in the closed manifold $\tilde{\mathfrak{M}} + \sum_{n=2}^{4} \tilde{\mathfrak{M}}_n + \sum \tilde{\mathfrak{S}}_{MN}$[12]). Further it is chosen in such a way that the number of critical points of $\tilde{P}^*(\zeta_1, \zeta_2)$ in the inserted parts $\tilde{\mathfrak{S}}_{MN}$ is known.

If the values of $\tilde{P}(\zeta_1, \zeta_2)$ on the segments $\mathfrak{i}_k^3$, $k=1, 2$, as well as the behavior of $\tilde{P}$ when we approach $\mathfrak{i}_k^3$ are known, the continuation $\tilde{P}^*(\zeta_1, \zeta_2)$ can be determined in the desired way. Since for the critical manifolds of a twice continuously differentiable function MORSE's inequalities hold and the critical manifolds in $\tilde{\mathfrak{S}}_{MN}$ are known, using these inequalities we obtain relations for the critical manifolds of $\tilde{P}(\zeta_1, \zeta_2)$ in the original domain $\tilde{\mathfrak{M}} = \mathscr{T}(\mathfrak{M})$. In a future publication the author expects to discuss the above sketched procedure in more detail.

REMARK 4. We note that the results of this paper can be used as a basis for a generalization of ROUCHÉ's theorem.

Bibliography

[1] BERGMAN, S.: Über die Abbildungen durch Paare von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Jahresbericht d. deutschen Mathem.-Vereinigung **39**, 24—26 (1930). — [2] BERGMAN, S.: Über Funktionen zweier komplexer Veränderlichen die ebene Pol- und Nullflächen besitzen. Jahresbericht d. deutschen Mathem.-Vereinigung **39**, 266—268 (1930). — [3] BERGMAN, S.: Über die ausgezeichneten Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Annalen **104**, 611—636 (1931). — [4] BERGMAN, S.: Über die Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche. Jahresbericht d. deutschen Mathem.-Vereinigung **42**, 238—252 (1932/33). — [5] BERGMAN, S.: Über den Wertvorrat einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Z. **36**, 171—183 (1932). — [6] BERGMAN, S.: Über eine in gewissen Bereichen gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. Math. Z. **39**, 76—94, 605—608 (1934). — [7] BERGMAN, S.: Über eine Integraldarstellung von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. Rec. Math. (Mat. Sbornik), N.S. **1** (43), 851—862 (1936). — [8] BERGMAN, S.: Über das Verhalten der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen in Gebieten mit einer ausgezeichneten Randfläche. Mathematica **14**, 107—123 (1938). — [9] BERGMAN, S.: Über meromorphe Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Compositio Math. **6**, 305—335 (1939). — [10] BERGMAN, S.: Geometric and potential-theoretical methods in the theory of functions of several complex variables. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. II, 1952, pp. 165—173. — [11] BERGMAN, S.: Kernel function and extended classes in the theory of functions of complex variables. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953, pp. 135—157. — [12] BERGMAN, S.: Bounds for analytic functions in

[12]) If we connect the boundary part $\tilde{\mathfrak{i}}_k^3$ directly with $\tilde{\mathfrak{i}}_{nk}^3$ the obtained functions do not necessarily have to be continuously differentiable.

domains with a distinguished boundary surface, Math. Z. **63**, 173—194 (1955). — [*13*] BERGMAN, S., and J. MARCINKIEWICZ: Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes. Fund. Math. **33**, 75—94 (1939). — [*14*] BERGMAN, S., and M. SCHIFFER: Bounded functions of two complex variables. Amer. J. Math. **64**, 161—169 (1944). — [*15*] BERGMAN, S., and M. SCHIFFER: Potential-theoretic methods in the theory of functions of two complex variables. Compositio Math. **10**, 213—240 (1952). — [*16*] BERS, L.: On bounded analytic functions of two complex variables in certain domains with distinguished boundary surfaces. Amer. J. Math. **64**, 514—529 (1942). — [*17*] BREMERMANN, H.: Analytic continuation of the kernel function and of the invariant metric in several complex variables. Proceedings of the Conference on Complex Variables. Ann Arbor, Michigan 1954. — [*18*] BREMERMANN, H.: Holomorphic continuation of the kernel function, Lectures on functions of a complex variable. Ann Arbor: The University of Michigan Press 1955. — [*19*] BREMERMANN, H.: On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **91**, 246—276 (1959). — [*20*] GELBART, A.: On the growth of properties of a function of two complex variables given by its power series expansion. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 199—210 (1941). — [*21*] LOWDENSLAGER, D.: Potential theory and a generalized Jensen-Nevanlinna formula for functions of several complex variables. J. Math. Mech. **7**, 207—218 (1958). — [*22*] LOWDENSLAGER, D.: Potential theory in bounded symmetric homogeneous complex domains. Annals of Math. **67**, 467—484 (1958). — [*23*] MORSE, M.: The topology of pseudo-harmonic functions. Duke Math. J. **13**, 21—42 (1946). — [*24*] MORSE, M.: Topological methods in the theory of functions of a complex variable. Princeton University Press 1947. — [*25*] MORSE, M., and M. HEINS: Topological methods in the theory of functions of a single complex variable. Annals of Math. **46**, 600—624, 625—666 (1945); **47**, 233—274 (1946). — [*26*] SOMMER, S.: Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen. Math. Annalen **125**, 172—182 (1952). — [*27*] SZEGÖ, G.: Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Math. Z. **9**, 218—270 (1921). [*28*] WEIL, A.: Sur les series de polynomes de deux variables complexes. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 1304 (1932). — [*29*] WEIL, A.: L'integral de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. Math. Annalen **111**, 178—182 (1935). — [*30*] WEIL, A.: Varietes Kähleriennes. Paris: Hermann 1958.

Stanford University, Stanford, Cal. (USA)

(Eingegangen am 6. September 1959)

Vor kurzem erschien:

Algebra II

Von Dr. B. L. VAN DER WAERDEN, Professor der Mathematik an der Universität Zürich

Unter Benutzung von Vorlesungen von E. ARTIN und E. NOETHER

Vierte Auflage der Modernen Algebra
X, 275 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 29,60

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. GRAMMEL · F. HIRZEBRUCH · E. HOPF · H. HOPF · W. MAAK · W. MAGNUS · F. K. SCHMIDT · K. STEIN · B. L. VAN DER WAERDEN. Band 34)

INHALTSÜBERSICHT

Algebraische Funktionen einer Variablen · Topologische Algebra · Allgemeine Idealtheorie der kommutativen Ringe · Theorie der Polynomideale · Ganze algebraische Größen • Lineare Algebra · Algebren · Darstellungstheorie der Gruppen und Algebren · Namen- und Sachverzeichnis.

AUS DEN BESPRECHUNGEN

„. . . Mit diesem Buch liegt ein Werk von einem der Meister dieser Methode und bedeutendsten Schöpfer auf dem Gebiete der Algebra vor, der zugleich ein Virtuose der Darstellungsform ist. Die Idealtheorie, die lineare Algebra und die Darstellungstheorie der Gruppen bilden den wesentlichen Inhalt der Algebra und werden vom Verfasser so eingehend behandelt, daß jeder, der diese Abschnitte studiert, die algebraische Methodik in seinem Forschungsgebiet zu erkennen und aus ihr fruchtbare Folgen zu ziehen vermag."

Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschien:

Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie

Von Dr. W. MEYER-EPPLER, b. ao. Professor und Direktor des Instituts für Phonetik und Kommunikationsforschung an der Universität Bonn

(Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen.

Herausgegeben von W. MEYER-EPPLER. I. Band)

Mit 178 Abbildungen und 1 Tafel. XVIII, 446 Seiten Gr.-8°. 1959.

Ganzleinen DM 98,—

ZUR INFORMATION

In der Reihe „Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen" sollen Fragen der menschlichen, tierischen und apparativen Kommunikation sowie der Kybernetik (d. h. der Lehre von den physikalischen und physiologischen Regelsystemen) von Experten behandelt werden. Als Veröffentlichungssprachen sind Deutsch und Englisch vorgesehen.

Der erste Band über „Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie" gibt einen Überblick über die verschiedenen Zweige der informationstheoretischen Forschung im besonderen Hinblick auf die menschlichen Kommunikationspartner. Er beginnt mit der mathematischen Beschreibung von Signalen und linearen Übertragungssystemen und geht dann über zur Statistik von Symbolen und zur Übertragung von Symbolen über gestörte Systeme. Eine eingehende Betrachtung der Rolle der menschlichen Sinnesorgane als Informationsempfänger leitet über zum Problem „Signal und Zeichen" und damit zur sprachlichen Kommunikation in ihren verschiedenen Aspekten.

INHALTSÜBERSICHT

Die Kommunikationskette · Strukturtheorie der Signale · Eigenschaften linearer Übertragungssysteme · Symbolstatistik · Gestörte Systeme · Sicherung gegen Übertragungsfehler · Die Sinnesorgane als Informationsempfänger · Signal und Zeichen · Akustische und optische Valenzklassen als Zeichenträger · Formstrukturen und Konstruktionen · Die gestörte sprachliche Kommunikation · Anhang: Tabelle der Funktion $-p \operatorname{ld} p$ · Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany